

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT  
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TÔN THẤT HOÀNG LÂN

**PHÁT TRIỂN CÁC KỸ THUẬT PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO  
PHÂN TÍCH KẾT CẤU DẠNG TÂM VÀ VỎ**

LUẬN ÁN TIẾN SĨ  
NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT

Tp. Hồ Chí Minh, tháng /2022

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT  
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

**TÔN THẮT HOÀNG LÂN**

**PHÁT TRIỂN CÁC KỸ THUẬT PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO  
PHÂN TÍCH KẾT CẤU DẠNG TẤM VÀ VỎ**

**NGÀNH: CƠ KỸ THUẬT - 9520101**

HƯỚNG DẪN KHOA HỌC 1: PGS.TS. NGUYỄN VĂN HIẾU

HƯỚNG DẪN KHOA HỌC 2: PGS.TS. CHÂU ĐÌNH THÀNH

PHẢN BIỆN 1:

PHẢN BIỆN 2:

PHẢN BIỆN 3:

Tp. Hồ Chí Minh, tháng /2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT  
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

Số: 1379a/QĐ-ĐHSPKT

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM  
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Tp. Hồ Chí Minh, ngày 31 tháng 8 năm 2018

## QUYẾT ĐỊNH

Về việc đổi tên luận án cho nghiên cứu sinh khóa 2017-2020

### HIỆU TRƯỞNG TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP. HỒ CHÍ MINH

Căn cứ Quyết định số 426/TTg ngày 27 tháng 10 năm 1976 của Thủ tướng Chính phủ về một số vấn đề cấp bách trong mạng lưới các trường đại học và Quyết định số 118/2000/QĐ-TTg ngày 10 tháng 10 năm 2000 của Thủ tướng Chính phủ về việc tổ chức lại Đại học Quốc gia Thành Phố Hồ Chí Minh, tách Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh trực thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo;

Căn cứ Quyết định số 70/2014/QĐ-TTg ngày 10 tháng 12 năm 2014 của Thủ tướng Chính phủ về việc ban hành Điều lệ trường Đại học;

Căn cứ Quyết định số 937/QĐ-TTg ngày 30 tháng 6 năm 2017 về việc phê duyệt đề án thí điểm đổi mới cơ chế hoạt động của Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Tp. Hồ Chí Minh;

Căn cứ Thông tư số 10/2009/TT-BGDĐT ngày 07/5/2009 của Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc Ban hành Quy chế đào tạo trình độ tiến sĩ;

Căn cứ Thông tư số 05/2012/TT-BGDĐT ngày 15/02/2012 của Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc sửa đổi, bổ sung một số điều của Quy chế đào tạo trình độ tiến sĩ ban hành kèm theo Thông tư số 10/2009/TT-BGDĐT ngày 07/5/2009 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo;

Xét nhu cầu công tác và khả năng cán bộ;

Xét đề nghị của nghiên cứu sinh và Trường phòng Đào tạo,

### QUYẾT ĐỊNH

**Điều 1.** Đổi tên luận án tiến sĩ cho:

Nghiên cứu sinh : **Tôn Thất Hoàng Lâm**

Ngành : Cơ kỹ thuật

Khoá: 2017 - 2020

Tên luận án mới : **Phát triển các kỹ thuật phần tử hữu hạn cho phân tích kết cấu dạng tấm và vỏ**

Người HD thứ nhất (HD chính): **PGS.TS Nguyễn Văn Hiếu**

Người HD thứ hai : **TS. Châu Đình Thành**

Thời gian thực hiện : **17/5/2017 đến 17/5/2020**

**Điều 2.** Giao cho Phòng Đào tạo quản lý, thực hiện theo đúng Quy chế đào tạo trình độ tiến sĩ của Bộ Giáo dục & Đào tạo đã ban hành.

**Điều 3.** Trưởng các đơn vị: phòng Đào tạo, khoa quản ngành, phòng KHTC và các Ông (Bà) có tên ở Điều 1 chịu trách nhiệm thi hành quyết định này.

Quyết định có hiệu lực kể từ ngày ký. ✕

Nơi nhận:

- BGH (để chỉ đạo);
- Như điều 3;
- Lưu: VT, SĐH (3b).

**HIỆU TRƯỞNG**  
  
PGS. TS Lê Hiếu Giang

---

# LÝ LỊCH KHOA HỌC

## I. LÝ LỊCH SƠ LƯỢC:

Họ & tên: Tôn Thất Hoàng Lân

Giới tính: Nam

Ngày, tháng, năm sinh: 07/11/1978

Nơi sinh: Huế

Quê quán: Thừa Thiên Huế

Dân tộc: Kinh

Chức vụ, đơn vị công tác trước khi học tập, nghiên cứu: Giảng viên Trường ĐH

Kiến Trúc Tp Hồ Chí Minh

Địa chỉ liên lạc: 3 Núi Thành, Phường 13, Quận Tân Bình, Tp Hồ Chí Minh

Điện thoại cơ quan: (028) 38.222748

Điện thoại nhà riêng: 0908531029

Fax: Không

E-mail: lan.tonthathoang@uah.edu.vn

## II. QUÁ TRÌNH ĐÀO TẠO:

### 1. Đại học:

Hệ đào tạo: Chính quy

Thời gian đào tạo từ 09/1996 đến 01/2001

Nơi học (trường, thành phố): Trường ĐH Bách Khoa Tp Hồ Chí Minh, Việt Nam

Ngành học: Xây dựng DD và CN

Tên đồ án tốt nghiệp: *Thiết kế trụ sở Ngân hàng Sài Gòn Thương tín Sacombank*

Ngày & nơi bảo vệ đồ án, luận án hoặc thi tốt nghiệp: 2001, Trường ĐH Bách Khoa Tp Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn: PGS.TS. Bùi Công Thành

### 2. Thạc sĩ:

Hệ đào tạo: Hợp tác Việt-Bi

Thời gian đào tạo từ 09/2001 đến 09/2003

Nơi học (trường, thành phố): Trường ĐH Bách Khoa Tp Hồ Chí Minh, Việt Nam + Trường ĐH Liegé, Vương quốc Bỉ

Ngành học: Cơ kỹ thuật

Tên luận văn: *Yield line method in reinforced concrete shells*

Ngày & nơi bảo vệ luận văn: 2003, Trường ĐH Bách Khoa Tp Hồ Chí Minh

Người hướng dẫn: GS.TS. Nguyễn Đăng Hưng

### 3. Tiến sĩ:

Hệ đào tạo: Chính quy

Thời gian đào tạo từ 05/2017 đến 03/2022

Tại (trường, viện, nước): Trường ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tên luận án: *Phát triển các kỹ thuật phân tử hữu hạn cho phân tích kết cấu dạng tấm và vỏ*

Người hướng dẫn: PGS.TS. Nguyễn Văn Hiếu, PGS.TS. Châu Đình Thành

Ngày & nơi bảo vệ: 2022, Trường ĐH Sư Phạm Kỹ Thuật Tp Hồ Chí Minh

**4. Trình độ ngoại ngữ :** Tiếng Anh B2

**5. Học vị, học hàm, chức vụ kỹ thuật được chính thức cấp; số bằng, ngày & nơi cấp:**

Kỹ sư xây dựng dân dụng và công nghiệp; số bằng B295650, cấp ngày 23/3/2001 tại Trường ĐH Bách Khoa Tp Hồ Chí Minh

Thạc sĩ cơ kỹ thuật; cấp ngày 15/3/2004 tại Trường ĐH Liegé, Vương quốc Bỉ

### **III. QUÁ TRÌNH CÔNG TÁC CHUYÊN MÔN KỂ TỪ KHI TỐT NGHIỆP ĐẠI HỌC:**

Thời gian	Nơi công tác	Công việc đảm nhiệm
2003 đến nay	Khoa Xây dựng, Trường ĐH Kiến Trúc Tp Hồ Chí Minh	Giảng viên

### **IV. CÁC CÔNG TRÌNH KHOA HỌC:**

#### **• CÁC BÀI BÁO ISI**

1. Enhancement to four-node quadrilateral plate elements by using cell-based smoothed strains and higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of composite structures. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 22(7), pp. 2302-2329, 2020.

2. An Improved Four-Node Element for Analysis of Composite Plate/Shell Structures Based on Twice Interpolation Strategy. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 17(6), p. 1950020, 2020.

3. Static and buckling analyses of stiffened plate/shell structures using the quadrilateral element SQ4C. *Comptes Rendus. Mécanique*, Vol. 348(4), pp. 285-305, 2020

4. A Combined Strain Element in Static, Frequency and Buckling Analyses of Laminated Composite Plates and Shells. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, Vol. 65(1), pp. 56-71, 2021

5. A novel quadrilateral element for analysis of functionally graded porous plates/shells reinforced by graphene platelets. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 91(6), pp. 2435-2466, 2021.

---

• **CÁC BÀI BÁO KHÁC**

1. Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations. *Proceedings of the International Conference on Advances in Computational Mechanics*, Springer, Singapore, pp. 461-475, 2017.

2. Phân tích ứng xử tĩnh tấm composite đa lớp dựa trên một lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.

3. Phân tích dao động tự do của vỏ có sườn gia cường bằng phần tử tứ giác MISQ24. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.

4. Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using SQ4T Elements based on Twice Interpolation Strategy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Vol. 6(1), pp. 125-136, 2020.

Ngày 22 tháng 8 năm 2022

**Người khai ký tên**

(đã ký)

Tôn Thất Hoàng Lân

---

## LỜI CAM ĐOAN

Tôi cam đoan đây là công trình nghiên cứu của tôi.

Các số liệu, kết quả nêu trong Luận án là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kỳ công trình nào khác.

*Tp. Hồ Chí Minh, ngày 22 tháng 8 năm 2022*

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

(đã ký)

Tôn Thất Hoàng Lân

---

## LỜI CẢM ƠN

Trước tiên, nghiên cứu sinh kính gửi lời cảm ơn sâu sắc đến các Thầy hướng dẫn PGS.TS.Nguyễn Văn Hiếu và PGS.TS.Châu Đình Thành. Các Thầy đã luôn đồng viên và định hướng cho tôi trong suốt quá trình thực hiện nhiệm vụ.

Nghiên cứu sinh cũng chân thành gửi lời cảm ơn đến Ban chủ nhiệm, quý Thầy Cô của Khoa Xây dựng trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp Hồ Chí Minh; quý Thầy Cô tham gia hướng dẫn các học phần trong chương trình đào tạo tiến sĩ; Hội đồng khoa học đánh giá chuyên đề tổng quan, chuyên đề khoa học 1, chuyên đề khoa học 2, cấp cơ sở; Nhà khoa học phản biện cấp cơ sở, cấp trường; Đại diện cơ quan đoàn thể, Nhà khoa học nhận xét bản tóm tắt; cùng các cộng sự đã đóng góp ý kiến, tạo điều kiện, động lực cho nghiên cứu sinh thực hiện công việc nghiên cứu.

Nghiên cứu sinh trân trọng cảm ơn Ban lãnh đạo Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp Hồ Chí Minh cũng như Trường ĐH Kiến trúc Tp Hồ Chí Minh vì đã có những chính sách hỗ trợ kịp thời cho nghiên cứu sinh trong quá trình học tập và làm việc.

Nghiên cứu sinh không quên cảm ơn những người thân yêu trong gia đình luôn chia sẻ mọi khó khăn, là chỗ dựa vững chắc về vật chất lẫn tinh thần trong suốt thời gian thực hiện và hoàn thành luận án tiến sĩ.

Nghiên cứu sinh  
Tôn Thất Hoàng Lân



---

## TÓM TẮT

Tấm/vỏ là các kết cấu phổ biến trong cuộc sống thực tế, chúng được dùng làm mái che, sàn, tường, xilo, bể chứa,... Trong số các phương pháp dùng để mô phỏng cũng như phân tích ứng xử cơ học của tấm/vỏ, phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là phương pháp được sử dụng rộng rãi và hiệu quả nhất. Với sự xuất hiện liên tục các bài toán phức tạp mới, FEM vẫn tồn tại những khó khăn nhất định liên quan đến chi phí tính toán, tính linh hoạt, kỹ thuật rời rạc phần tử, tính ổn định, độ chính xác,... Vì vậy, việc kiến nghị những cải tiến kỹ thuật cho FEM hiện hữu trong mô phỏng ứng xử tấm/vỏ luôn giữ vai trò quan trọng. Hướng nghiên cứu này luôn thiết thực, mang tính thời sự từ nhiều thập kỷ qua đến tận bây giờ. Với mong muốn làm đa dạng thêm nữa, tạo ra thêm nhiều phần tử lai, tích hợp từ những ưu điểm của các phần tử hiện hữu, luận án này đã được hình thành. Bên cạnh đó, mục tiêu của nghiên cứu là tạo nên một tập hợp các phần tử tứ giác 4 nút đơn giản trong thiết lập công thức dùng cho phân tích tấm/vỏ, càng ít bị ảnh hưởng bởi các hiện tượng khóa màng, khóa cắt,... càng tốt. Các đóng góp chính của luận án:

- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4H dựa vào kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp kỹ thuật cải biên dạng  $C^0$ -HSĐT để phân tích phi tuyến kết cấu tấm phẳng và tấm gấp. Phần tử này cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính.
- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép (TIS) dùng nghiên cứu ứng xử tuyến tính và phi tuyến của kết cấu tấm/vỏ. Với việc xây dựng hàm nội suy bậc cao dựa vào giá trị nút lẫn gradient trung bình nút trong phạm vi miền ảnh hưởng, phần tử này cải thiện được yếu tố bất liên tục của biến dạng và ứng suất qua biên của nó.
- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4C dựa trên kỹ thuật tổ hợp biến dạng: màng, uốn và cắt để phân tích tuyến tính kết cấu tấm/vỏ có hoặc không có sườn gia cường.

---

Phần tử này cải thiện được độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về kết quả số liên quan đến hiện tượng khóa màng khi phân tích kết cấu vỏ.

- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4P dựa trên chuỗi đa thức Chebyshev để phân tích tuyến tính kết cấu dạng tấm/vỏ. Những kết quả số được cải thiện dựa vào lưới chia lần bậc của đa thức Chebyshev.

---

## ABSTRACT

Plates and shells are common structures in real life, they are used as roofs, floors, walls, silos, tanks, etc. Among the numerical methods used to simulate as well as analyze the mechanical behavior of plate and shell structures, the finite element method (FEM) is the most widely used and effective method. With the continuous emergence of new complex problems, FEM still has certain limitations related to discrete element techniques, accuracy, stability, computational cost, flexibility, etc. Therefore, it is always important to suggest technical improvements to FEM in plate/shell behavior simulation. This research direction has always been topical from the past decades to now. With the desire to further diversify, create more hybrid elements, integrate from the advantages of existing elements, this thesis is formed. Besides, the goal of the study is to create a simple set of 4-node quadrilateral elements in the formulation for plate/shell analysis, which is less affected by the phenomena of membrane locking, shear locking, etc. The main contributions of this thesis can be listed as follows:

- Constructing a 4-node quadrilateral element, namely SQ4H, based on cellbased strain smoothing enhancement combined with the type of C0-HSDT for nonlinear analysis of plate and folded plate structures. This element improves model accuracy and reduces numerical instability for geometrically nonlinear analysis.
- Constructing a 4-node quadrilateral element, namely SQ4T, based on twice interpolation strategy (TIS) for linear and nonlinear analysis of plate/shell structures. By establishing high-order shape functions that take into account the influence of the group of neighboring nodes on the considering element, this element improves the discontinuity of its strain and stress across its boundaries.
- Under the combined strain strategy with respect to overcoming membrane locking as well as shear locking phenomenon and using cell-based strain smoothing enhancement, the third contribution is to build a 4-node quadrilateral element SQ4C

---

for linear analysis of plate and shell structures with or without stiffeners. This element improves model accuracy and reduces numerical instability associated with membrane locking when analyzing shell structures.

- Based on the outstanding properties of Chebyshev polynomials, the last contribution is to give a 4-node quadrilateral element, namely SQ4P, with the goal throughout the thesis to analyze the behavior of plate and shell structures. Improved numerical results based on the mesh and the order of Chebyshev polynomials.

---

# MỤC LỤC

	TRANG
Trang tựa	
Quyết định giao đề tài .....	ii
Lý lịch khoa học .....	iii
Lời cam đoan.....	vi
Lời cảm ơn .....	vii
Tóm tắt .....	viii
Mục lục.....	xii
Danh sách các chữ viết tắt.....	xvi
Danh sách các ký hiệu.....	xviii
Danh sách các hình.....	xx
Danh sách các bảng.....	xxiv
<b>MỞ ĐẦU .....</b>	<b>xxvi</b>
1. Lý do lựa chọn đề tài .....	xxvi
2. Nhiệm vụ nghiên cứu .....	xxvi
3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu.....	xxvi
4. Hướng tiếp cận và phương pháp nghiên cứu.....	xxvi
5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu.....	xxvii
6. Cấu trúc sơ lược.....	xxvii
<b>Chương 1. TỔNG QUAN .....</b>	<b>1</b>
1.1 Khái quát chung về kết cấu tấm/vỏ .....	1
1.2 Đánh giá tóm lược về các phần tử và các phương pháp phần tử hữu hạn sẵn có cho tấm/vỏ .....	2
1.3 Động lực và mục tiêu cụ thể.....	8
1.4 Bố cục cụ thể của luận án.....	8
1.5 Đóng góp chính của luận án .....	9
<b>Chương 2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT .....</b>	<b>11</b>
2.1 Vật liệu áp dụng.....	11

2.1.1	Vật liệu đẳng hướng cơ bản.....	11
2.1.2	Vật liệu composite .....	12
2.1.3	Vật liệu phân cấp chức năng FGM .....	15
2.1.4	Vật liệu xếp phân cấp chức năng FGP có gia cường tấm tiêu cầu graphene GPLs.....	19
2.2	Lý thuyết tấm/vỏ.....	23
2.2.1	Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT .....	23
2.2.2	Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT .....	23
2.3	Công thức phần tử hữu hạn .....	24
2.3.1	Phần tử màng tứ giác đẳng tham số.....	24
2.3.2	Phần tử tấm tứ giác uốn có kể biến dạng cắt .....	26
2.3.3	Phần tử vỏ phẳng .....	27
2.3.4	Công thức phần tử hữu hạn trong phân tích uốn tĩnh, dao động tự do và ổn định .....	29
<b>Chương 3. PHẦN TỬ SQ4H .....</b>		<b>32</b>
3.1	Giới thiệu .....	32
3.2	Kỹ thuật cải biên HSDT thành $C^0$ -HSDT.....	32
3.3	Xây dựng phần tử SQ4H .....	34
3.4	Kết quả số .....	41
3.4.1	Phân tích uốn phi tuyến của tấm phẳng.....	41
3.4.2	Phân tích uốn phi tuyến của tấm gập.....	45
3.5	Kết luận.....	48
<b>Chương 4. PHẦN TỬ SQ4T.....</b>		<b>49</b>
1.1	Giới thiệu .....	49
1.2	Kỹ thuật nội suy kép.....	49
1.3	Xây dựng phần tử SQ4T.....	53
1.3.1	Phương trình chủ đạo .....	53
1.3.2	Triển khai công thức phần tử hữu hạn.....	54
1.4	Kết quả số .....	56

1.4.1	Phân tích uốn tĩnh .....	56
1.4.2	Phân tích dao động tự do .....	61
1.4.3	Phân tích ổn định .....	63
1.4.4	Phân tích uốn phi tuyến .....	66
1.5	Kết luận .....	68
<b>Chương 5. PHẦN TỬ SQ4C .....</b>		<b>69</b>
5.1	Giới thiệu .....	69
5.2	Kỹ thuật tổ hợp biến dạng .....	69
5.2.1	Kỹ thuật khử khóa cắt .....	69
5.2.2	Kỹ thuật khử khóa màng .....	70
5.2.3	Kỹ thuật tron biến dạng trên miền con .....	72
5.3	Xây dựng phần tử SQ4C .....	73
5.4	Kết quả số .....	78
5.4.1	Kiểm chứng .....	78
5.4.2	Phân tích uốn tĩnh .....	79
5.4.3	Phân tích dao động tự do .....	85
5.4.4	Phân tích ổn định .....	88
5.5	Kết luận .....	92
<b>Chương 6. PHẦN TỬ SQ4P .....</b>		<b>93</b>
6.1	Giới thiệu .....	93
6.2	Đa thức Chebyshev .....	93
6.3	Xây dựng phần tử SQ4P .....	95
6.4	Kết quả số .....	99
6.4.1	Kiểm chứng .....	99
6.4.2	Phân tích uốn tĩnh .....	103
6.4.3	Phân tích dao động tự do .....	106
6.4.4	Phân tích ổn định .....	108
6.5	Kết luận .....	112
<b>Chương 7. ĐÁNH GIÁ SAI SỐ CHUNG GIỮA CÁC PHẦN TỬ .....</b>		<b>113</b>

---

7.1	Giới thiệu .....	113
7.2	Tấm đẳng hướng chịu tải phân bố đều .....	113
7.3	Tấm đẳng hướng dao động tự do.....	118
7.4	Vỏ cầu đẳng hướng chịu tải phân bố đều .....	119
7.5	Kết luận.....	120
<b>Chương 8. KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN .....</b>		<b>122</b>
8.1	Kết luận.....	122
8.2	Hướng phát triển.....	123
❖ <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO .....</b>		<b>125</b>
❖ <b>DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ.....</b>		<b>140</b>



---

## DANH SÁCH CÁC CHỮ VIẾT TẮT

SQ4H	The Sort of Q4 element based on Higher-order shear deformation theory
SQ4T	The Sort of Q4 element based on Twice interpolation strategy
SQ4C	The Sort of Q4 element based on Combined strain strategy
SQ4P	The Sort of Q4 element based on Chebyshev Polynomial
FEM	Finite Element Method
MITC	Mixed Interpolation Tensorial Components
SFEM	Smoothed Finite Element Methods
IGA	IsoGeometric Analysis
FGM	Functionally Graded Material
FGP	Functionally Graded Porous
GPLs	Graphene PlateLets
P-S	Symmetric Porosity distribution
P-A	Asymmetric porosity distribution
P-U	Uniform Porosity distribution
GPL-S	Graphene PlateLet Symmetric distribution
GPL-A	Graphene PlateLet Asymmetric distribution
GPL-U	Graphene PlateLet Uniform distribution
FSDT	First-order Shear Deformation Theory
TSDT	Third-order Shear Deformation Theory
HSDT	Higher-order Shear Deformation Theory
CSMIN3	Cell-based smoothed three-node Mindlin plate element
RDKQ	Refined Discrete Quadrilateral Laminate element
EFG	Element Free Galerkin
TIS	Twice Interpolation Strategy
MISQ20	Mixed Interpolation Smoothing Quadrilateral element with 20 dofs
MISQ24	Mixed Interpolation Smoothing Quadrilateral element with 24 dofs

---

CS-DSG3	Cell-based Smoothed Discrete Shear Gap element
ES-DSG3	Edge-based Smoothed Discrete Shear Gap element
MQH3T	Hybrid Laminated element
SQUAD4	Mixed Laminated element
RDTMLC	Refined Discrete Triangular Laminated element
MFE	Accurate Four-node Shear Flexible Composite Plate element
MLSDQ	Moving Least-Squares Differential Quadrature
RBF	Radial Basic Function
HOIL	Higher-Order Individual-Layer
MKI	Meshfree Moving Kriging Interpolation
LW	Layer-wise
S	Simply Support
C	Clamp
F	Free
HBQ8	8-node Quadrilateral Assumed-Stress Hybrid Shell element
KUMBA	8-node Curved Shell element with Reduced Integration

---

## DANH SÁCH CÁC KÝ HIỆU

$u, v, w$	thành phần chuyển vị thẳng theo ba trục $x, y$ và $z$
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	thành phần chuyển vị xoay quanh ba trục $x, y$ và $z$
$w^*$	độ võng chuẩn hóa
$\xi, \eta$	hệ tọa độ tự nhiên
$\sigma, \tau$	ứng suất pháp, ứng suất tiếp
$\varepsilon, \gamma$	biến dạng dài, biến dạng cắt
$m, b, s, g$	“màng”, “uốn”, “cắt”, “hình học”
$L, NL$	tuyến tính, phi tuyến
<b>K</b>	ma trận độ cứng
<b>M</b>	ma trận khối lượng
<b>K<sub>g</sub></b>	ma trận độ cứng hình học
<b>F, f</b>	vectơ lực nút
<b>q</b>	vectơ chuyển vị nút
<b>u</b>	trường chuyển vị
$q$	tải trọng phân bố
$q^*$	tải trọng phân bố chuẩn hóa
$P$	tải trọng tập trung
$E, G$	mô đun Young, mô đun đàn hồi cắt
$\mu$	hệ số Poisson
$\rho$	mật độ khối lượng
$k_s$	hệ số hiệu chỉnh cắt
<b>D<sub>m</sub>, D<sub>b</sub>, D<sub>s</sub></b>	các ma trận vật liệu
<b>B<sub>m</sub>, B<sub>b</sub>, B<sub>s</sub></b>	các ma trận liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị
<b>T, R, S</b>	các ma trận chuyển
$\Pi$	thế năng toàn phần
$N, N$	vectơ hàm dạng, hàm dạng

$\mathbf{N}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{S}_0$	vectơ lực, mômen, lực cắt ngang
$\mathbf{P}_0, \mathbf{R}_0$	vectơ mômen bậc cao, lực cắt ngang bậc cao
$P^*$	tải trọng tới hạn chuẩn hóa
$e_0$	độ xốp
$e$	độ lệch trục
$a, b, h, R, L, \varphi, \alpha$	các thông số đặc trưng hình học của kết cấu tấm/vỏ
$t$	chiều cao sườn gia cường
$\theta$	góc hướng sợi
$\omega$	tần số dao động
$\omega^*$	tần số dao động chuẩn hóa
$p, p_1, p_2$	bậc đa thức Chebyshev
$n_e$	số phần tử
$n_c$	số miền con
$n_{sp}$	số nút trong miền ảnh hưởng của một phần tử
$st$	chỉ đến đối tượng sườn gia cường

# DANH SÁCH CÁC HÌNH

HÌNH	TRANG
Hình 1.1: Kết cấu 1D, 2D & 3D .....	1
Hình 1.2: a) Phần tử màng, b) Phần tử tấm uốn thuần túy .....	3
Hình 1.3: Kỹ thuật làm trơn trên nút và trên cạnh .....	6
Hình 1.4: Kỹ thuật làm trơn trên miền con, $n_c=1$ & 2 .....	6
Hình 1.5: Kỹ thuật xây dựng phần tử có số nút biến đổi bất kỳ trên cạnh .....	7
Hình 1.6: Kỹ thuật nội suy kép.....	7
Hình 1.7: Các hàm cơ bản sử dụng trong IGA .....	7
Hình 2.1: Mô tả vật liệu composite .....	12
Hình 2.2: Vật liệu composite theo cấu tạo .....	12
Hình 2.3: Tre và sản phẩm composite từ tre.....	13
Hình 2.4: Lớp composite lệch trục.....	14
Hình 2.5: Vật liệu phân cấp chức năng FGM.....	15
Hình 2.6: Hệ thống đẩy phản lực làm bằng vật liệu FGM .....	16
Hình 2.7: P-FGM .....	17
Hình 2.8: S-FGM .....	18
Hình 2.9: E-FGM.....	19
Hình 2.10: Cấu trúc xương làm từ FGP: (a) đốt sống, (b) hộp sọ và (c) xương chậu ..	20
Hình 2.11: a) P-S, b) P-A và c) P-U .....	20
Hình 2.12: a) GPL-S, b) GPL-A và c) GPL-U.....	22
Hình 2.13: Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT).....	23
Hình 2.14: Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT).....	24
Hình 2.15: Phần tử màng tứ giác đẳng tham số .....	24
Hình 2.16: Phần tử tấm uốn.....	26
Hình 2.17: Phép chiếu xuống mặt phẳng trung hòa .....	28
Hình 3.1: Chiều dương quy ước của các chuyển vị thẳng và xoay trong tấm .....	34
Hình 3.2: Vật liệu composite cốt sợi nhiều lớp.....	35
Hình 3.3: $n_c = 1$ & 2 và giá trị các hàm dạng tương ứng.....	40

<b>Hình 3.4:</b> Tấm vuông ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều.....	42
<b>Hình 3.5:</b> Tấm hình bình hành ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều .....	44
<b>Hình 3.6:</b> Tấm hình thang ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều .....	45
<b>Hình 3.7:</b> So sánh độ võng của tấm hình thang ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều .	45
<b>Hình 3.8:</b> Tấm gập $90^\circ$ liên kết ngàm chịu tải phân bố đều thẳng góc với bề mặt tấm .	46
<b>Hình 3.9:</b> Tấm gập $60^\circ$ liên kết ngàm chịu tải phân bố đều thẳng góc với bề mặt tấm .	47
<b>Hình 4.1:</b> Phần tử tứ giác 4 nút .....	49
<b>Hình 4.2:</b> Miền ảnh hưởng nút 1 .....	50
<b>Hình 4.3:</b> Hàm dạng tứ giác 4 nút: a) truyền thống, b) nội suy kép .....	53
<b>Hình 4.4:</b> Minh họa vật liệu composite nhiều lớp và vật liệu FGM .....	53
<b>Hình 4.5:</b> Kết cấu màng Cook.....	56
<b>Hình 4.6:</b> Chia lưới kết cấu màng Cook .....	57
<b>Hình 4.7:</b> So sánh sai số của chuyển vị điểm A .....	58
<b>Hình 4.8:</b> Trường ứng suất (a) SQ4T, (b) MITC4 .....	58
<b>Hình 4.9:</b> Tấm vuông nhiều lớp chịu a) tải phân bố đều và b) phân bố hình sin .....	59
<b>Hình 4.10:</b> (a) So sánh độ võng chuẩn hóa, (b) So sánh sai số độ võng chuẩn hóa tấm vuông $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ liên kết ngàm.....	59
<b>Hình 4.11:</b> (a) So sánh tần số dao động chuẩn hóa, (b) So sánh sai số tần số dao động chuẩn hóa tấm vuông $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ liên kết tựa đơn với $a/h = 5$ .....	61
<b>Hình 4.12:</b> Vỏ trụ liên kết tựa đơn .....	63
<b>Hình 4.13:</b> Tấm vuông $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ chịu nén đơn trục.....	64
<b>Hình 4.14:</b> Vỏ trụ 5 lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ .....	65
<b>Hình 4.15:</b> Tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng FGM.....	66
<b>Hình 4.16:</b> Đường cong tải trọng-độ võng của tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng liên kết ngàm.....	67
<b>Hình 4.17:</b> Đường cong tải trọng-độ võng của tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng liên kết tựa đơn .....	67
<b>Hình 5.1:</b> Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng cắt ngang .....	70
<b>Hình 5.2:</b> Cơ sở xác định nút ảo 5 .....	71
<b>Hình 5.3:</b> Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng màng .....	72
<b>Hình 5.4:</b> Mô tả miền con tứ giác tron và giá trị các hàm dạng tương ứng.....	73

<b>Hình 5.5:</b> Mô tả kết cấu tấm gia cường sườn .....	77
<b>Hình 5.6:</b> Mô tả kiểm chứng .....	79
<b>Hình 5.7:</b> (a) So sánh độ võng chuẩn hóa, (b) So sánh sai số độ võng chuẩn hóa tấm vuông $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ liên kết ngàm.....	80
<b>Hình 5.8:</b> Sai số của độ võng $w^*$ và ứng suất $\sigma^*$ .....	80
<b>Hình 5.9:</b> Vỏ trụ với màng cứng ở hai đầu .....	82
<b>Hình 5.10:</b> Mô hình 1/8 vỏ trụ với a) lưới vuông và b) lưới méo .....	82
<b>Hình 5.11:</b> Vỏ cầu chịu tải phân bố đều .....	83
<b>Hình 5.12:</b> Tấm vuông tựa đơn được gia cường một sườn ngang.....	84
<b>Hình 5.13:</b> Độ hội tụ của độ võng được chuẩn hóa.....	85
<b>Hình 5.14:</b> (a) So sánh tần số dao động chuẩn hóa, (b) So sánh sai số tần số dao động chuẩn hóa tấm vuông $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ liên kết tựa đơn với $a/h = 5$ .....	86
<b>Hình 5.15:</b> Sáu dạng dao động đầu tiên ứng với $E_1/E_2 = 40$ và $a/h = 5$ .....	87
<b>Hình 5.16:</b> Sáu dạng dao động đầu tiên của vỏ cầu ngàm các cạnh.....	88
<b>Hình 5.17:</b> Tấm vuông tựa đơn gia cường sườn ngang chịu nén đơn trục.....	90
<b>Hình 5.18:</b> Tấm vuông tựa đơn được gia cường $n_{st}$ sườn ngang cách đều.....	91
<b>Hình 5.19:</b> Kết quả so sánh lực tới hạn .....	92
<b>Hình 6.1:</b> Hàm dạng 1D a) bậc 3, b) bậc 4, c) bậc 5 và bậc 6) liên quan đến đa thức Chebyshev .....	95
<b>Hình 6.2:</b> Chiều dương của các thành phần chuyển vị trong phần tử SQ4P.....	95
<b>Hình 6.3:</b> Phần tử SQ4P trong hệ tọa độ tự nhiên tương ứng $p_1=p_2=3$ .....	96
<b>Hình 6.4:</b> Đường cong hội tụ của chuyển vị chuẩn hóa ngay giữa tấm liên kết a) tựa đơn và b) ngàm .....	100
<b>Hình 6.5:</b> Sự hội tụ của chuyển vị chuẩn hóa ngay giữa tấm liên kết a) tựa đơn và b) ngàm ứng với giá trị $a/h$ biến đổi từ 10 đến 100000 .....	100
<b>Hình 6.6:</b> Sự hội tụ của ứng suất chuẩn hóa $\sigma_x^*$ tại điểm $(a/2, a/2, h/2)$ của tấm ứng với $a/h = 10$ và 1000.....	101
<b>Hình 6.7:</b> Vỏ bán cầu có khoét lỗ $18^\circ$ và biến dạng sau khi chịu lực .....	102
<b>Hình 6.8:</b> Kết cấu nửa vỏ yên ngựa và biến dạng sau khi chịu lực .....	103

<b>Hình 6.9:</b> Ảnh hưởng của $e_0$ và $WF_{(GPL)}$ (wt.%) lên độ võng của tấm FGP-GPLs với phân bố P-S.....	105
<b>Hình 6.10:</b> Ảnh hưởng của $e_0$ và $WF_{(GPL)}$ (wt.%) lên độ võng của tấm FGP-GPLs với phân bố P-A .....	106
<b>Hình 6.11:</b> Ảnh hưởng của $e_0$ lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 của tấm FGP-GPLs với a) P-S và b) P-A.....	108
<b>Hình 6.12:</b> So sánh lực tới hạn đơn trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với $WF_{(GPL)} = 1.0$ (wt.%) và $e_0 = 0.5$ .....	110
<b>Hình 6.13:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với $WF_{(GPL)} = 1.0$ (wt.%) và $a/h = 0.5$ .....	111
<b>Hình 7.1:</b> Tấm vuông chịu tải phân bố đều.....	113
<b>Hình 7.2:</b> So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết tựa đơn với $a/h = 10, 100, 1000$ & $10000$ .....	115
<b>Hình 7.3:</b> So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết ngàm với $a/h = 10$ & $10000$ .....	115
<b>Hình 7.4:</b> So sánh tần số của bốn dạng dao động đầu tiên .....	118
<b>Hình 7.5:</b> Vỏ cầu đẳng hướng tựa đơn chịu tải phân bố đều.....	119



## DANH SÁCH CÁC BẢNG

BẢNG	TRANG
<b>Bảng 2.1:</b> Những đặc tính của vật liệu thành phần gốm và kim loại .....	15
<b>Bảng 4.1:</b> Độ võng tại điểm A .....	57
<b>Bảng 4.2:</b> Độ võng chuẩn hóa giữa tám vuông đa lớp liên kết ngàm chịu tải phân bố đều .....	59
<b>Bảng 4.3a:</b> Kết quả chuẩn hóa của tám vuông 2 lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ( $a/h = 100$ ) .....	60
<b>Bảng 4.3b:</b> Kết quả chuẩn hóa của tám vuông 2 lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ( $a/h = 20$ ) .....	60
<b>Bảng 4.4:</b> So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa với $a/h = 5$ .....	62
<b>Bảng 4.5:</b> So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa với $E_1/E_2=40$ .....	62
<b>Bảng 4.6:</b> So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa .....	63
<b>Bảng 4.7:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi $a/h=10$ .....	64
<b>Bảng 4.8:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa chuẩn hóa khi $E_1/E_2=40$ .....	64
<b>Bảng 4.9:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi $a/h$ .....	66
<b>Bảng 5.1:</b> Kết quả kiểm chứng .....	78
<b>Bảng 5.2:</b> Độ võng chuẩn hóa giữa tám vuông đa lớp liên kết ngàm chịu tải phân bố đều .....	79
<b>Bảng 5.3:</b> Các kết quả chuẩn hóa của tám vuông đa lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin .....	81
<b>Bảng 5.4:</b> Các kết quả độ võng chuẩn hóa tại C .....	82
<b>Bảng 5.5:</b> Độ võng $w_A \times 10^{-3}$ tại A .....	84
<b>Bảng 5.6:</b> So sánh độ võng chuẩn hóa ngay chính giữa tám .....	85
<b>Bảng 5.7:</b> So sánh tần số dao động chuẩn hóa ứng với $a/h=5$ .....	86
<b>Bảng 5.8:</b> So sánh tần số dao động chuẩn hóa ứng với $E_1/E_2=40$ .....	87
<b>Bảng 5.9:</b> So sánh tần số dao động chuẩn hóa .....	88
<b>Bảng 5.10:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi $a/h=10$ .....	89
<b>Bảng 5.11:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi $E_1/E_2=40$ .....	89

<b>Bảng 5.12:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi tỷ số $a/h$ .....	90
<b>Bảng 5.13:</b> So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi giá trị $\gamma$ , $\beta$ và $\delta$ .....	91
<b>Bảng 6.1:</b> Khảo sát độ võng chuẩn hóa chính giữa tấm vuông khi thay đổi bậc $p_1$ & $p_2$ .....	99
<b>Bảng 6.2:</b> Độ võng chuẩn hóa chính giữa tấm vuông với cả hai trường hợp liên kết tựa đơn và ngàm .....	100
<b>Bảng 6.3:</b> So sánh ứng suất chuẩn hóa $\sigma_x^*$ tại điểm $(a/2, a/2, h/2)$ của tấm .....	101
<b>Bảng 6.4:</b> Giá trị chuyển vị hướng tâm tại điểm $A$ ( $m$ ) của vỏ bán cầu có khoét lỗ....	102
<b>Bảng 6.5:</b> Giá trị chuyển vị đứng tại điểm $A$ ( $m$ ) của vỏ nửa yên ngựa.....	103
<b>Bảng 6.6:</b> Đặc trưng vật liệu FGP-GPLs.....	103
<b>Bảng 6.7:</b> Giá trị $w^*$ của tấm FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) ứng với tổ hợp GPL-S & P-S.. .....	104
<b>Bảng 6.8:</b> Giá trị $w^*$ của tấm FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) ứng với nhiều loại tổ hợp..	104
<b>Bảng 6.9:</b> So sánh tần số dao động chuẩn hóa mode 1 cho tấm FGP-GPLs.....	107
<b>Bảng 6.10:</b> Ảnh hưởng của $e_0$ lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 của tấm vuông FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) với $WF_{(GPL)} = 1.0wt.%$ và $a/h = 20$ .....	107
<b>Bảng 6.11:</b> Ảnh hưởng của $a/h$ lên lực tới hạn đơn trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với $WF_{(GPL)} = 1.0(wt.%)$ và $e_0 = 0.5$ .....	109
<b>Bảng 6.12:</b> Ảnh hưởng của $a/h$ lên lực tới hạn đa trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP -GPLs với $WF_{(GPL)} = 1.0(wt.%)$ và $e_0 = 0.5$ .....	109
<b>Bảng 6.13:</b> Ảnh hưởng của $e_0$ lên lực tới hạn chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với $WF_{(GPL)} = 1.0(wt.%)$ và $a/h = 0.5$ .....	110
<b>Bảng 7.1:</b> So sánh độ võng chính giữa tấm vuông liên kết tựa đơn (SSSS) .....	116
<b>Bảng 7.2:</b> So sánh độ võng chính giữa tấm vuông liên kết ngàm (CCCC) .....	116
<b>Bảng 7.3:</b> So sánh thời gian tính toán theo giây ( $s$ ).....	117
<b>Bảng 7.4:</b> So sánh giá trị bốn tần số dao động đầu tiên của tấm vuông đẳng hướng. ....	118
<b>Bảng 7.5:</b> So sánh thời gian tính toán theo giây ( $s$ ).....	119
<b>Bảng 7.6:</b> So sánh giá trị độ võng ngay chính giữa vỏ cầu tựa đơn .....	120

---

# MỞ ĐẦU

## 1. Lý do lựa chọn đề tài

Tấm/vỏ là các kết cấu phổ biến, thường gặp trong dân dụng và cơ khí (mái vòm, tháp giải nhiệt, đường ống, bể chứa, bình chịu áp lực), đóng tàu (vỏ tàu ngầm), hàng không vũ trụ (thùng, lớp, cánh, thân máy bay)... Từ quan điểm kỹ thuật, các trạng thái ứng xử khác nhau của tấm/vỏ dưới tác dụng của tải trọng cần phải được xem xét kỹ. Bên cạnh đó, các hạn chế liên quan đến hình dáng phức tạp của loại kết cấu này khi áp dụng phương pháp giải tích sẽ được giải quyết bằng phương pháp phần tử hữu hạn (FEM). Với sự xuất hiện liên tục những bài toán phức tạp mới (ví dụ vật liệu mới, điều kiện biên chính xác hơn, hay điều kiện tương tác phức tạp hơn, ...), FEM vẫn còn đó những khó khăn nhất định liên quan đến chi phí tính toán, tính linh hoạt, kỹ thuật rời rạc phần tử, tính ổn định, độ chính xác,... Vì vậy, việc đề xuất các cải tiến kỹ thuật cho FEM hiện hữu trong mô phỏng ứng xử các kết cấu dạng tấm/vỏ luôn đóng vai trò rất quan trọng. Hướng nghiên cứu này luôn thiết thực, mang tính thời sự từ nhiều thập kỷ qua đến tận bây giờ.

## 2. Nhiệm vụ nghiên cứu

Phát triển các kỹ thuật phần tử hữu hạn dùng để nghiên cứu ứng xử kết cấu dạng tấm/vỏ.

## 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

- *Đối tượng*: Kết cấu dạng tấm/vỏ.
- *Phạm vi nghiên cứu*: Phân tích uốn tĩnh, dao động tự do, ổn định của kết cấu dạng tấm/vỏ dựa vào các kỹ thuật được phát triển thông qua các phần tử đề xuất.

## 4. Hướng tiếp cận và phương pháp nghiên cứu

- Nghiên cứu lý thuyết
- Phát triển kỹ thuật phần tử hữu hạn
- Lập trình mô phỏng số
- Phân tích và đánh giá kết quả.

---

## **5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn của đề tài nghiên cứu**

Luận án phát triển các kỹ thuật tính toán cần thiết hiện nay khi mà những kỹ thuật tính toán ngày càng được ứng dụng cao trong thực tiễn với các đối tượng là kết cấu tấm/vỏ trong kỹ thuật. Từ các kết quả nghiên cứu của luận án, các phần tử đề xuất có thể được tích hợp vào các module tính toán của các phần mềm hiện hữu.

## **6. Cấu trúc sơ lược**

Luận án bao gồm: Mở đầu; Chương 1: Tổng quan; Chương 2: Cơ sở lý thuyết; Chương 3, 4, 5 và 6: Các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P; Chương 7: Đánh giá sai số chung giữa các phần tử, Chương 8: Kết luận và hướng phát triển kèm theo Danh mục tài liệu tham khảo và Danh mục các công trình công bố.

---

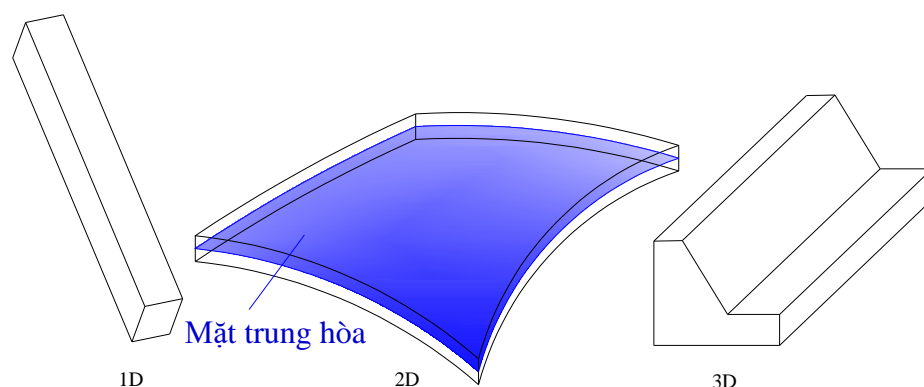
# Chương 1

## TỔNG QUAN

Mục tiêu của chương này là trình bày động lực cho việc nghiên cứu và phát triển các kỹ thuật tính toán phần tử hữu hạn hiện đại trong phân tích kết cấu tấm/vỏ và phác thảo những đóng góp cũng như những cải tiến có thể có được từ sự phát triển này. Chương bắt đầu bằng việc giới thiệu khái quát kết cấu tấm/vỏ và trình bày tổng quan về một số phần tử cũng như một số phương pháp phân tích phần tử hữu hạn phổ biến cho tấm/vỏ. Đây là bước quan trọng để xác định động cơ và mục tiêu của nghiên cứu này. Tiếp theo sau là bố cục của luận án được trình bày cùng với những đóng góp nổi bật của luận án.

### 1.1 Khái quát chung về kết cấu tấm/vỏ

Trong phân loại kết cấu cơ học, ngoài kết cấu thanh một chiều (1D) và kết cấu khối ba chiều (3D), còn có kết cấu tấm/vỏ hai chiều (2D) (kết cấu phẳng và cong có thành mỏng). Đối tượng này về khía cạnh hình dáng được giới hạn bởi hai bề mặt (trên và dưới) và các bề mặt bên, xem Hình 1.1. Khoảng cách giữa bề mặt trên và bề mặt dưới gọi là độ dày, là nhỏ so với các kích thước còn lại. Việc phân loại các cấu trúc tấm và vỏ có thể được thực hiện dựa trên độ mảnh, hình dạng của mặt trung hòa, các định nghĩa và giả định kèm theo cũng như dựa vào đặc điểm của sự phân bố ứng suất dọc theo chiều dày,...



**Hình 1.1:** Kết cấu 1D, 2D và 3D

Trên thực tế, tấm/vỏ là các kết cấu phổ biến, thường gặp trong dân dụng và cơ khí (mái vòm, tháp giải nhiệt, đường ống, bể chứa, bình chịu áp lực), đóng tàu (vỏ tàu ngầm), hàng không vũ trụ (thùng, lớp, cánh, thân máy bay)... Từ quan điểm kỹ thuật, các trạng

---

---

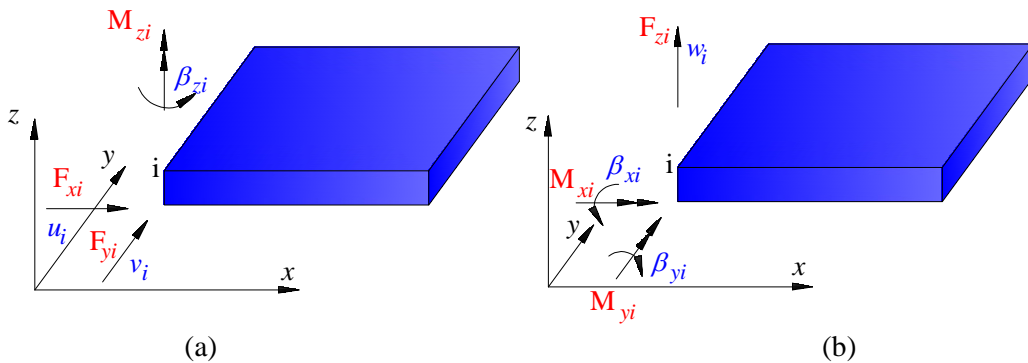
thái ứng xử khác nhau của tấm/vỏ dưới tác dụng của tải trọng cần phải được xem xét, [1-3]. Bên cạnh đó, các hạn chế liên quan đến hình dáng phức tạp của loại kết cấu này khi áp dụng phương pháp giải tích sẽ được giải quyết bằng phương pháp phần tử hữu hạn.

## 1.2 Đánh giá tóm lược về các phần tử và các phương pháp phần tử hữu hạn sẵn có cho tấm/vỏ

Các phần tử tấm, vỏ thường được mô hình hóa qua các mặt phẳng trung hòa của chúng. Tùy theo sự làm việc mà chúng có thể được coi như tấm chịu uốn, màng hay vỏ. Bên cạnh đó, từng phần tử tấm, vỏ có thể được mô tả như một phần tử tam giác (3 nút) hay phần tử tứ giác (4 nút) ứng với mặt phẳng trung hòa. Phần tử có thể thuộc một trong các loại sau [4, 5]:

- Phần tử màng chỉ chịu kéo hoặc nén nên không có chuyển vị thẳng vuông góc với mặt phẳng và xoay ngoài mặt phẳng (Hình 1.2a).
- Phần tử tấm uốn thuần túy không có chuyển vị thẳng theo hai phương trong mặt phẳng và xoay trong mặt phẳng (Hình 1.2b).
- Phần tử vỏ tổng quát tức chịu kéo (nén) và uốn đồng thời với ba loại phổ biến: (1) phần tử vỏ khối, (2) phần tử vỏ cong và (3) phần tử vỏ phẳng. Trong phạm vi luận án, tác giả sử dụng phần tử vỏ phẳng để phân tích kết cấu vỏ, đây là sự kết hợp thuần túy ứng xử uốn và màng của phần tử tấm kể trên. Nói chung, rất khó để xác định phần tử vỏ nào là lợi thế nhất. Trong ba loại phổ biến này, phần tử vỏ phẳng được coi là hấp dẫn nhất vì nó có thể được thiết lập dễ dàng bằng cách kết hợp các phần tử tấm uốn và màng hiện có. Dĩ nhiên nó đã được sử dụng rộng rãi vì tính chất đơn giản trong thiết lập công thức, hiệu quả trong việc thực hiện tính toán và tính linh hoạt trong các phân tích cho cả kết cấu vỏ lẫn tấm gập. Ngoài ra, việc kể đến hiệu ứng cắt ngang với sự hỗ trợ của động học Reissner-Mindlin và kết hợp bậc tự do xoay trong mặt phẳng, cũng cải thiện đáng kể hiệu suất của các phần tử phẳng này khi tính toán các kết cấu vỏ từ dày đến mỏng theo Darilmaz và Kumbasar [6]. Mặc dù việc sử dụng các phần tử tam giác phẳng để rời rạc kết cấu vỏ có hình dáng phức tạp là thích hợp nhất, tuy nhiên phần tử tứ giác thường được sử dụng do hiệu suất tốt hơn về tốc độ hội tụ so với phần tử tam giác. Điều này đã được chứng minh qua bài báo xuất bản của Lee và

Bathe [7]. Khó khăn xảy ra trong quá trình phát triển phần tử vỏ phẳng bốn nút là dễ hình thành các hiện tượng khóa liên quan đến phép nội suy của chuyển vị. Hai kiểu khóa phổ biến có thể xảy ra là: (1) khóa cắt (*shear locking*) phát sinh khi tỷ lệ giữa chiều dày và chiều dài của vỏ trở nên nhỏ và (2) khóa màng (*membrane locking*) xảy ra khi sử dụng lưới thô hoặc méo, đặc biệt trong các bài toán mà ứng xử uốn nổi trội.



**Hình 1.2:** a) Phần tử màng, b) Phần tử tám uốn thuần túy

Ngày nay trên phạm vi toàn cầu, các phương pháp số ngày càng trở nên quan trọng và chính yếu trong quá trình áp dụng để phân tích kết cấu phức tạp. Và dĩ nhiên phương pháp phần tử hữu hạn FEM (*Finite Element Method*) được sử dụng rộng rãi và hiệu quả nhất. Nhiều loại phần tử được đề xuất với mong muốn cải thiện kết quả hiện có, đem đến sự ổn định trong phân tích và tạo nên độ tin cậy trong sử dụng.

Ngược dòng lịch sử, vào đầu thập niên 70 của thế kỷ 19, các nhóm tác giả Irons và cộng sự, Zienkiewicz và cộng sự [8, 9] đã giới thiệu phần tử đẳng tham số  $C^0$ . Phần tử này nội suy độc lập trường chuyển vị và góc xoay đồng thời xét đến ảnh hưởng của biến dạng cắt. Nó được sử dụng nhằm nghiên cứu ứng xử kết cấu dày dạng tấm vỏ theo lý thuyết của Reissner-Mindlin. Tuy nhiên giới hạn của phần tử này là dẫn đến hiện tượng khóa cắt (*shear locking*) khi phân tích tấm/vỏ có kích thước chiều dày mỏng và kết quả là giá trị chuyển vị của kết cấu giảm khi chiều dày giảm do năng lượng biến dạng cắt không được loại trừ. Cho dù sau đó các nhà khoa học đã cố gắng tìm cách khắc phục hiện tượng khóa cắt này chẳng hạn như đề nghị dùng kỹ thuật tích phân giảm (*reducible integrations technique*) để giảm năng lượng biến dạng cắt nhưng giá trị kết quả đạt được vẫn chưa thỏa mãn mong muốn đặt ra. Đôi khi kỹ thuật này còn gây nên hiện tượng đồng hồ cát

---

(*hourglass phenomena* hay còn gọi là *spurious zero energy modes*) khi phân tích dao động tự do.

Với nỗ lực không ngừng của giới khoa học toàn cầu, một vài phương pháp cải tiến mới dùng cho cả phần tử tam giác và tứ giác như phương pháp nội suy phối hợp các thành phần ten-xơ MITC (*Mixed Interpolation Tensorial Components*) [10-13], phương pháp DSG (*Discrete Shear Gap method*) [14-17] hay MIN sử dụng phần tử tám Mindlin [18-20] đã nhanh chóng ra đời và xử lý được nhược điểm khoá cứng. Theo những phương pháp này, các thành phần biến dạng cắt không được tính toán trực tiếp bởi đạo hàm của trường chuyển vị mà thay vào đó chúng được xác định thông qua một tụ tập các điểm rời rạc trong phạm vi từng phần tử. Từ đây, MITC, DSG, MIN trở thành những phương pháp tin cậy trong hỗ trợ tính toán hay nghiên cứu ứng xử kết cấu tấm/vỏ với kết quả đạt được kỳ vọng đề ra. Cụ thể, phần tử tứ giác 4 nút (MITC4) đã đạt thành tựu nhất định khi phân tích kết cấu tấm/vỏ và kỹ thuật MITC này tiếp tục được tác giả Bathe và cộng sự mở rộng với phần tử 8 nút (MITC8) [11]. Tiếp theo đó là các phần tử 9 nút (MITC9) và 16 nút (MITC16) của họ như [12, 13]. Đặc biệt 2 phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp MISQ20 và MISQ24 của tác giả Nguyen-Van hay Nguyen-Van và cộng sự cải tiến từ MITC4 dựa vào kỹ thuật tron biến dạng màng, uốn trên miền con cho thấy hiệu quả tính toán cao với chi phí thấp, không chỉ cho tấm mà còn cho vỏ hình dạng phức tạp [5, 21, 22]. Họ phần tử tam giác tron 3 nút ES-DSG, NS-DSG, CS-DSG đưa ra bởi các nhóm tác giả Nguyen-Xuan và cộng sự [14, 15], Nguyen-Thoi và cộng sự [16] chứng minh khả năng sử dụng hiệu quả trong phân tích tĩnh, dao động tự do và ổn định tấm Reissner–Mindlin. Bên cạnh đó, với phần tử tứ giác 4 nút hay tam giác 3 nút tám Mindlin của tác giả Tessler và cộng sự cũng được sử dụng hiệu quả để cải tiến thành phần cắt ngang [18, 19]...

Ngoài ra, như đã đề cập ở trước, nếu dùng phần tử tứ giác phẳng bốn nút trong phân tích kết cấu dạng vỏ còn đưa đến hiện tượng khoá màng (*membrane locking*) liên quan đến quá trình chia lưới thô và méo. Nhóm tác giả Lee và cộng sự đã đề nghị kỹ thuật chia miền tứ giác của phần tử ra thành các miền con tam giác, tiến hành tính toán biến dạng màng trên các miền con này và đưa về các điểm buộc trên biên phần tử tứ giác giúp quá trình tính toán các thành phần biến dạng màng hợp lý hơn và xử lý được vấn đề khoá màng một cách hiệu quả [23-25].

---



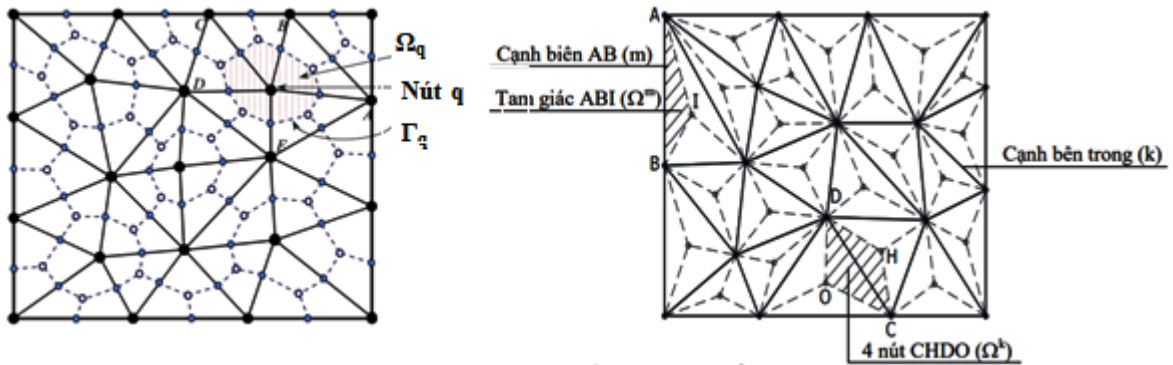
---

Thật thiếu sót khi không đề cập đến một hướng giải quyết khác liên quan tới các hiện tượng trên. Các phần tử tấm PSE (*Plate Spectral Element*) dựa trên hàm nội suy bậc cao dùng cho nghiên cứu ứng xử của kết cấu tấm/vỏ cũng đã chứng tỏ được khả năng vượt khó của chúng như giới thiệu của tác giả Zrahia và cộng sự [26]. Theo định hướng này, hàm dạng là hàm nội suy Lagrangian bậc cao thông qua các điểm Gauss - Legendre - Lobatto. Tuy nhiên trong một vài bài toán với điều kiện biên đặc biệt, để có được kết quả ổn định cần phải áp dụng luật cầu phương đủ [26]. Hiệu quả của hướng nghiên cứu này cũng như khả năng hội tụ của kết quả khi sử dụng phần tử PSE với lưới chia méo cũng được tác giả Sprague và cộng sự khảo sát đầy đủ [27, 28]. Ngoài ra, với những đặc tính nổi trội của đa thức Chebyshev chẳng hạn tuân theo quy luật hàm lượng giác, trực giao trong đoạn  $[-1,1]$ ,... việc thiết lập thuật toán phần tử hữu hạn dựa trên đa thức này cũng được nhiều tác giả đề cập đến như ở tài liệu [29] của tác giả Liu và cộng sự, [30] của tác giả He và cộng sự, [31] của tác giả Dang-Trung và cộng sự, ...

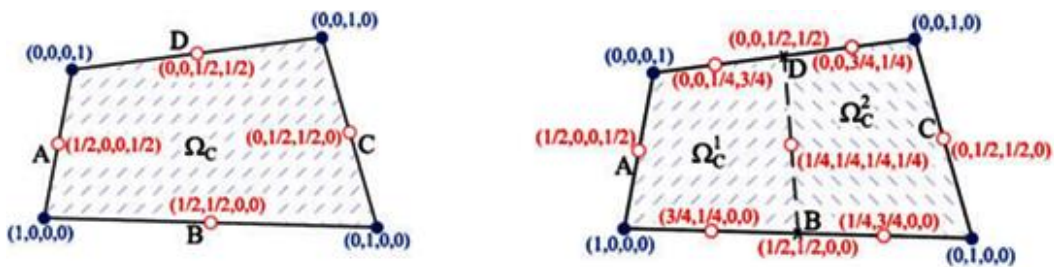
Để có cái nhìn tổng quát hơn nữa, luận án liệt kê một vài kỹ thuật phần tử hữu hạn hiện đại. Có thể thấy phương pháp phần tử hữu hạn trơn SFEM (*Smoothed Finite Element Methods*) đã được nhiều tác giả đề xuất như Liu và cộng sự, Nguyen-Xuan và cộng sự, Nguyen-Thoi và cộng sự, ...[32-35], điển hình là phương pháp phần tử hữu hạn trơn trên nút (NS: *Node-based Smoothing strain*, Hình 1.3a [14, 36-39], trơn trên cạnh (ES: *Edge-based Smoothing strain*, Hình 1.3b [15, 40-44] hay trơn trên miền con (CS: *Cell-based Smoothing strain*, Hình 1.4a và Hình 1.4b [20-22, 45-48] dùng để phân tích nhiều dạng kết cấu khác nhau trong môi trường đa vật lý dựa trên các loại phần tử tam giác, tứ giác. Có thể thấy kết quả đạt được bởi SFEM chính xác hơn, hội tụ nhanh hơn so với FEM truyền thống và đến nay SFEM vẫn tiếp tục thể hiện sự ưu việt của nó trong tính toán kết cấu...

Kỹ thuật xây dựng phần tử có số nút biến đổi bất kỳ trên cạnh của tác giả Lim và cộng sự [49], Cho và cộng sự [50] có thể cung cấp sự linh hoạt để giải quyết các vấn đề về lưới không khớp như kết nối lưới hay tinh chỉnh lưới thích ứng dùng cho phân tích tương tác đa môi trường vật lý, Hình 1.5. Tuy nhiên quá trình thiết lập công thức phần tử hữu hạn rất phức tạp kèm độ hiệu quả kém khi phân tích kết cấu với lưới chia méo đặc biệt cho vỏ.

---



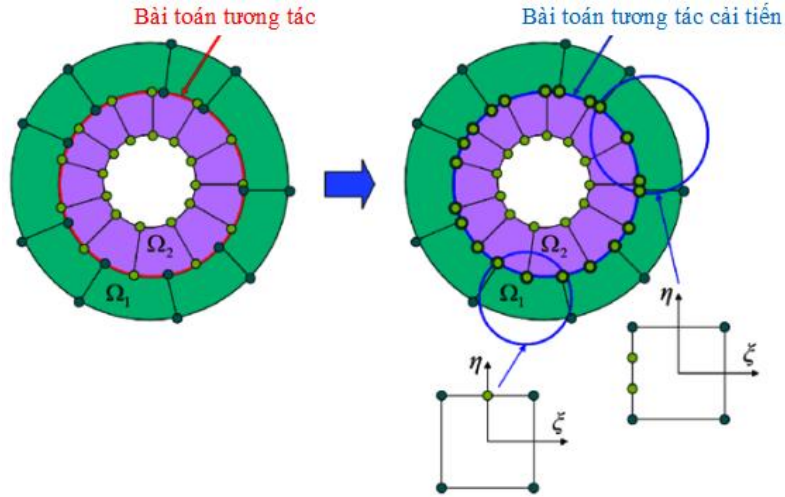
Hình 1.3: Kỹ thuật làm trơn trên nút và trên cạnh, [32, 36, 41]



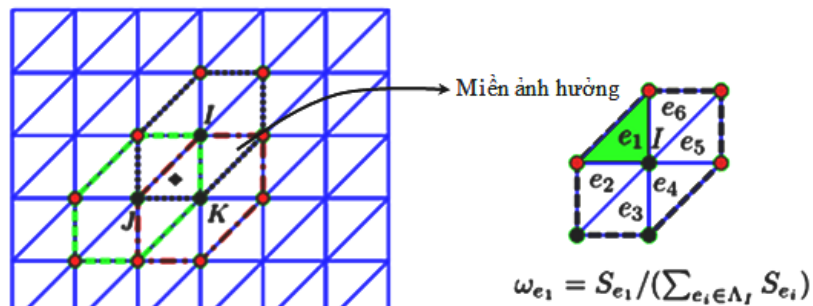
Hình 1.4: Kỹ thuật làm trơn trên miền con,  $n_c=1$  & 2, [20, 21]

Kỹ thuật nội suy kép cho phần tử tam giác 3 nút, tứ giác 4 nút, ... áp dụng để phân tích các bài toán phẳng cũng được các nhóm tác giả Bui và cộng sự [51], Wu và cộng sự [52], Zheng và cộng sự [53] đưa ra, Hình 1.6. Ưu điểm của kỹ thuật này thể hiện ở công tác xử lý hậu kỳ, trong một số kết quả đạt được cho bài toán phẳng, trường ứng suất thu được liên tục qua biên phần tử tuy nhiên cần phải đánh giá cụ thể hơn các đặc tính khác của kỹ thuật này thông qua phân tích tấm/vỏ.

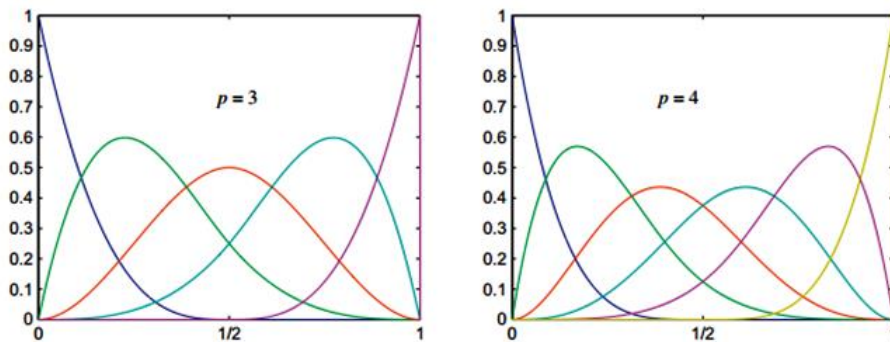
Một nhược điểm khác của FEM liên quan đến sự khác biệt giữa miền chính xác và miền xấp xỉ của bài toán. Nhược điểm này đã được khắc phục thông qua phương pháp đẳng hình học IGA (*IsoGeometric Analysis*) với ý tưởng chính là sự tích hợp phân tích phần tử hữu hạn vào các công cụ thiết kế dưới sự trợ giúp máy tính (CAD) dựa trên hàm cơ sở NURBS như Hình 1.7 lần đầu tiên được đề xuất bởi tác giả Hughes và cộng sự [54] và sau đó phát triển mạnh mẽ bởi các nhóm khác như Nguyen-Thanh và cộng sự, Thai-Hoang và cộng sự, Tran-Van và cộng sự [55-60], Bazilevs và cộng sự [61], Gómez và cộng sự [62],...



**Hình 1.5:** Kỹ thuật xây dựng phần tử có số nút biến đổi bất kỳ trên cạnh, [49, 50]



**Hình 1.6:** Kỹ thuật nội suy kép, [51-53]



**Hình 1.7:** Các hàm cơ bản sử dụng trong IGA, [55, 56]

Hàm cơ sở này triển khai trên toàn miền của cấu trúc chứ không đơn giản trên miền cục bộ như các hàm dạng Lagrangian trong FEM. Vấn đề hàm dạng phân bố toàn cục như thế sẽ làm cho việc tính toán số trở nên phức tạp. Bên cạnh đó, để tính toán được các hàm

---

dạng, các điểm tích phân Gauss bắt buộc phải chuyển sang không gian tham số. Đây có thể xem là khó khăn cần khắc phục của IGA...

### 1.3 Động lực và mục tiêu cụ thể

Với sự xuất hiện liên tục những bài toán phức tạp mới (ví dụ vật liệu mới, điều kiện biên chính xác hơn, hay điều kiện tương tác phức tạp hơn, ...), FEM vẫn tồn tại những khó khăn nhất định liên quan đến chi phí tính toán, tính linh hoạt, kỹ thuật rời rạc phần tử, tính ổn định, độ chính xác,... Vì vậy, việc đề xuất các cải tiến kỹ thuật cho FEM hiện hữu trong mô phỏng ứng xử các kết cấu dạng tấm/vỏ luôn giữ vai trò rất quan trọng. Hướng nghiên cứu này luôn thiết thực, mang tính thời sự từ nhiều thập kỷ qua đến tận bây giờ.

Thật vậy, trên phạm vi toàn cầu, các nhà khoa học vẫn đang tiếp tục tìm cách phát triển các loại phần tử mới, các kỹ thuật mới dùng cho phân tích kết cấu tấm/vỏ bên cạnh các kỹ thuật phần tử hữu hạn hiện đại đã ra đời như kỹ thuật tron biến dạng [5, 16, 34, 35], kỹ thuật tích hợp CAD dựa trên NURBS [54, 61, 62], kỹ thuật nội suy kép [51-53], kỹ thuật xây dựng nút biến đổi tùy ý trên biên [49, 50], ... Một số lượng không nhỏ các loại phần tử khác nhau dựa trên nguồn gốc thiết lập khác nhau với nhiều đặc tính riêng biệt dùng cho phân tích kết cấu như MITC4 [10], MITC4+ [23, 25], MISQ20 [5], MISQ24 [5], CSMIN3, DSG3, CS-DSG3, ES-DSG3 [15, 16, 37],... cũng ra đời góp phần làm phong phú thêm sự lựa chọn trong công việc nghiên cứu, học tập và ứng dụng thực tế. Với mong muốn làm đa dạng thêm nữa, tạo ra thêm nhiều phần tử lai, tích hợp từ những ưu điểm của các phần tử hiện hữu, luận án này đã được hình thành.

Bên cạnh đó, mục tiêu của nghiên cứu là tạo nên một tập hợp các phần tử tứ giác 4 nút đơn giản trong thiết lập công thức dùng cho phân tích tấm/vỏ, càng ít bị ảnh hưởng bởi các hiện tượng khóa màng (*membrane locking*), khóa cắt (*shear locking*), khóa thể tích (*volume locking*),... càng tốt.

### 1.4 Bố cục cụ thể của luận án

Luận án được chia thành 8 chương bao gồm cả chương tổng quan này và được bố cục tiếp theo như sau:

- 
- Chương 2 trình bày cơ sở lý thuyết liên quan chi tiết đến kết cấu tám/vỏ, từ loại vật liệu đến lý thuyết phân tích. Chương này cũng trình bày về công thức phần tử hữu hạn được sử dụng trong luận án.
  - Chương 3 mô tả việc xây dựng phần tử tứ giác 4 nút dựa trên kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 dạng  $C^0$  để phân tích phi tuyến kết cấu tám phẳng và tám gấp. Từ đó một vài ví dụ số được trình bày để bao quát, một cách hiệu quả nhất có thể, tất cả các đặc tính của phần tử này thông qua sự thay đổi hình dạng hình học, mức độ lưới chia và các điều kiện biên áp đặt lên kết cấu.
  - Chương 4 thể hiện việc hình thành phần tử tứ giác 4 nút dựa trên kỹ thuật nội suy kép dùng cho phân tích tuyến tính kết cấu dạng tám/vỏ lẫn phân tích phi tuyến hình học của chúng. Công thức phần tử hữu hạn được mô tả từ việc xây dựng hàm dạng bậc cao kể đến chiến lược nội suy trường chuyển vị thông qua các giá trị nút ảnh hưởng lẫn gradient trung bình của chúng. Từ đó một vài ví dụ số được đưa ra nhằm đánh giá ưu và nhược điểm của phần tử này.
  - Chương 5 mô tả phần tử tứ giác 4 nút dựa trên kỹ thuật tổ hợp biến dạng: màng, uốn và cắt để phân tích tuyến tính kết cấu tám/vỏ có hoặc không có sườn gia cường.
  - Chương 6 giới thiệu những đặc tính nổi bật của đa thức Chebyshev, xây dựng hàm xấp xỉ dựa trên chuỗi đa thức Chebyshev để từ đó hình thành nên phần tử tứ giác 4 nút dùng cho phân tích tuyến tính kết cấu tám/vỏ.
  - Chương 7 tiến hành đánh giá sai số chung giữa các phần tử đề xuất trong luận án. Nêu rõ ưu và nhược điểm của từng phần tử, khả năng áp dụng cũng như những hạn chế của chúng khi dùng để nghiên cứu ứng xử của kết cấu tám/vỏ.
  - Chương 8 kết thúc luận án. Phần này nêu tóm tắt lại các kết quả đã nghiên cứu cùng với các kết luận được đúc kết và sau cùng là đề xuất các hướng phát triển nghiên cứu trong tương lai.

## 1.5 Đóng góp chính của luận án

Luận án này có những đóng góp chính như sau:

---

- 
- Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4H dựa vào kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp kỹ thuật cải biên dạng  $C^0$ -HSDT để phân tích phi tuyến kết cấu tấm phẳng và tấm gấp. Phần tử này cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính.
  - Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép để nghiên cứu ứng xử tuyến tính và phi tuyến tính kết cấu tấm/vỏ. Với việc xây dựng hàm nội suy bậc cao dựa vào giá trị nút lẫn gradient trung bình nút trong phạm vi miền ảnh hưởng, phần tử này cải thiện được yếu tố bất liên tục của biến dạng và ứng suất qua biên của nó.
  - Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4C dựa trên kỹ thuật tổ hợp biến dạng: màng, uốn và cắt để phân tích tuyến tính kết cấu tấm/vỏ có hoặc không có sườn gia cường. Phần tử này cải thiện được độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về kết quả số liên quan đến hiện tượng khóa màng khi phân tích kết cấu vỏ.
  - Xây dựng phần tử tứ giác 4 nút SQ4P dựa trên chuỗi đa thức Chebyshev để phân tích tuyến tính kết cấu dạng tấm vỏ. Kết quả số được cải thiện dựa vào lưới chia lẫn bậc của đa thức Chebyshev.

---

## Chương 2

# CƠ SỞ LÝ THUYẾT

### 2.1 Vật liệu áp dụng

#### 2.1.1 Vật liệu đẳng hướng cơ bản

Vật liệu được coi là đẳng hướng nếu các đặc tính không phụ thuộc vào hướng. Các đặc tính vật liệu đẳng hướng được liệt kê dưới đây. Tùy thuộc vào loại phần tử, loại phân tích và tải trọng, không phải tất cả các đặc tính của vật liệu đều có thể được yêu cầu [63, 64].

##### 2.1.1.1 Mật độ khối lượng $\rho$

Mật độ khối lượng của vật liệu là khối lượng của nó trên một đơn vị thể tích. Mật độ khối lượng có thể áp dụng cho tất cả các phần tử tuyến tính. Tính chất này được yêu cầu trong tất cả các phân tích tuyến tính liên quan đến trọng lực hoặc tải trọng có gia tốc. Thuộc tính này cũng cần thiết cho phân tích dao động để tìm tần số dao động và tất cả các phân tích động theo phương thức chồng chất.

##### 2.1.1.2 Mô đun Young $E$

Mô đun Young là độ dốc của đường thẳng thể hiện mối liên hệ giữa biến dạng và ứng suất của vật liệu trong giới hạn đàn hồi. Nó cũng được gọi là mô đun đàn hồi của vật liệu. Mô đun đàn hồi có thể áp dụng cho tất cả các phần tử tuyến tính và cần thiết cho tất cả các phép phân tích tuyến tính.

##### 2.1.1.3 Hệ số giãn nở nhiệt

Hệ số giãn nở nhiệt dựa trên sự co lại hay giãn nở của vật liệu do chênh lệch nhiệt độ. Điều này có thể áp dụng cho tất cả các loại phần tử tuyến tính và là bắt buộc đối với bất kỳ mô hình tuyến tính nào có chứa tải nhiệt.

##### 2.1.1.4 Hệ số Poisson $\mu$

Hệ số Poisson được tìm thấy bằng cách lấy trị tuyệt đối của tỷ số giữa biến dạng hông và biến dạng dọc trục cho cấu kiện chịu tải dọc trục. Các giá trị điển hình cho hệ số Poisson nằm trong khoảng từ 0.0 đến 0.5. Nó có thể áp dụng cho tất cả các loại phần tử tuyến tính ngoại trừ giàn và là bắt buộc đối với tất cả các loại phân tích tuyến tính.

##### 2.1.1.5 Mô đun đàn hồi cắt $G$

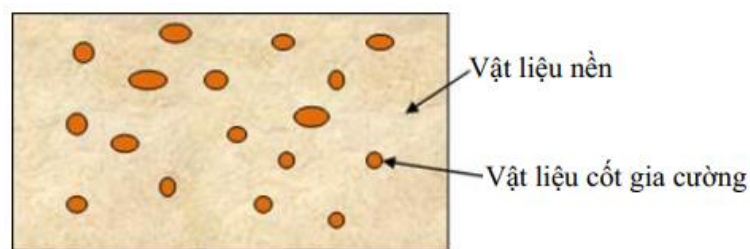
---

---

Mô đun đàn hồi cắt tương tự là độ dốc của đường ứng suất cắt & biến dạng cắt của vật liệu. Đây cũng được gọi là mô đun của độ cứng. Nó có thể áp dụng cho tất cả các loại phân tử tuyến tính ngoại trừ giòn và dẻo.

### 2.1.2 Vật liệu composite

Vật liệu composite được cấu thành từ hai vật liệu có tính chất vật lý và hóa học khác nhau, thường gọi là vật liệu cốt gia cường và vật liệu nền. Khi chúng kết hợp với nhau sẽ tạo ra một loại vật liệu tiên tiến có tính năng vượt trội hơn so với vật liệu truyền thống chẳng hạn như bền hơn, nhẹ hơn hoặc kháng điện [65]. Vật liệu cốt gia cường được cấu tạo từ các sợi thủy tinh, sợi gốm,... hoặc từ các loại hạt phi kim và kim loại như mô tả ở Hình 2.1. Vật liệu nền có công năng định vị và giữ ổn định cốt gia cường, chúng thường được cấu tạo từ polyme, vữa xi măng,...

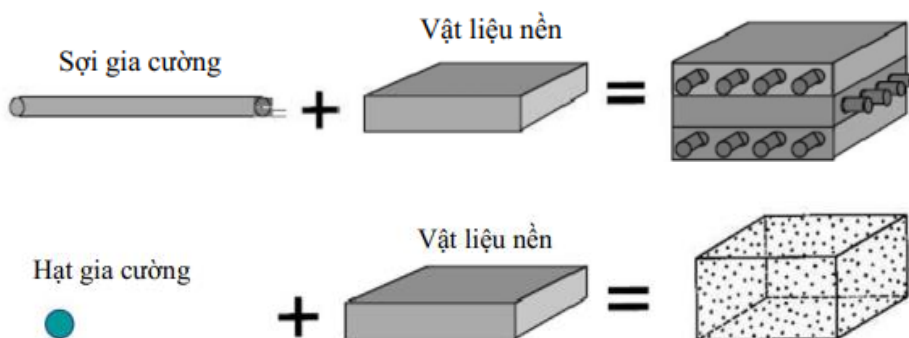


**Hình 2.1:** Mô tả vật liệu composite, [66]

Phân loại cụ thể

- Theo cấu tạo

Vật liệu composite được cấu thành từ các hạt gia cường hay các sợi gia cường kèm vật liệu nền như Hình 2.2.

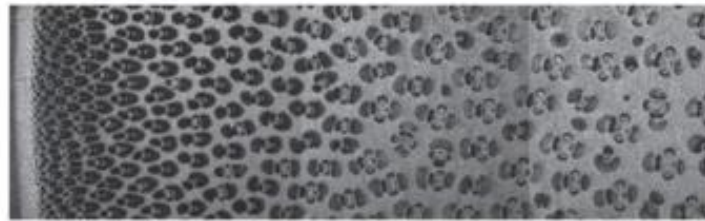


**Hình 2.2:** Vật liệu composite theo cấu tạo, [66]



- Theo bản chất

Vật liệu composite được cấu thành từ vật liệu nền vô cơ, hữu cơ và khoáng vật. Hình 2.3 mô tả loại composite nền hữu cơ.



**Hình 2.3:** Tre và sản phẩm composite từ tre, [66]

Trong kỹ thuật, vật liệu composite còn được phân loại theo [67] như sau

- Composite cốt bột hay hạt
- Composite cốt vải
- Composite lớp vuông

Vật liệu composite còn được xếp thành 3 nhóm chính theo quan điểm cơ học

- Composite đẳng hướng
- Composite trục hướng: đúng trục và lệch trục
- Composite đẳng hướng ngang: đúng trục và lệch trục

Có thể mô tả trạng thái ứng suất phẳng cho vật liệu composite như sau

- Lớp composite trục hướng và đẳng hướng ngang đúng trục

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

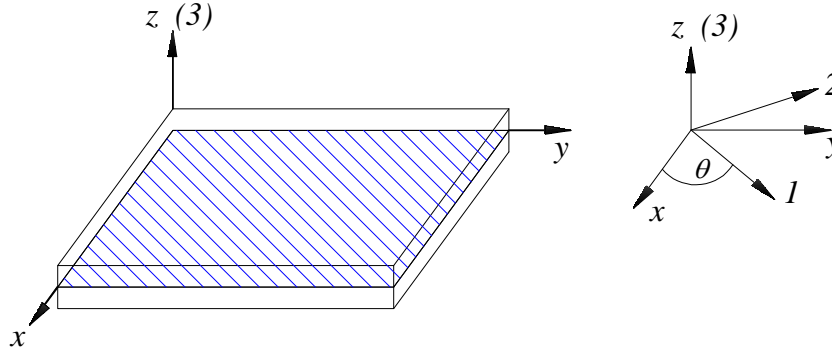
trong đó

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1 / (1 - \mu_{12}\mu_{21}); \quad Q_{11} = \mu_{21}E_1 / (1 - \mu_{12}\mu_{21}) \\ Q_{22} &= E_2 / (1 - \mu_{12}\mu_{21}); \quad Q_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ở đây  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\mu_{12}$  và  $G_{12}$  là bốn mô đun kỹ thuật độc lập của lớp vật liệu composite.

- Lớp composite trục hướng và đẳng hướng ngang lệch trục

Lớp composite lệch trục thường gặp như Hình 2.4



**Hình 2.4:** Lớp composite lệch trục

Thực hiện phép quay tenxơ ứng suất từ hệ trục chính  $(1, 2)$  đến hệ trục quy chiếu  $(x, y)$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

Thực hiện phép quay tenxơ biến dạng từ hệ trục quy chiếu  $(x, y)$  đến hệ trục chính  $(1, 2)$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

Quan hệ giữa ứng suất và biến dạng trong hệ trục  $(x, y)$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

trong đó

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta \\ Q'_{12} &= Q_{12}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + (Q_{11} + Q_{22})\cos^2\theta\sin^2\theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta$$

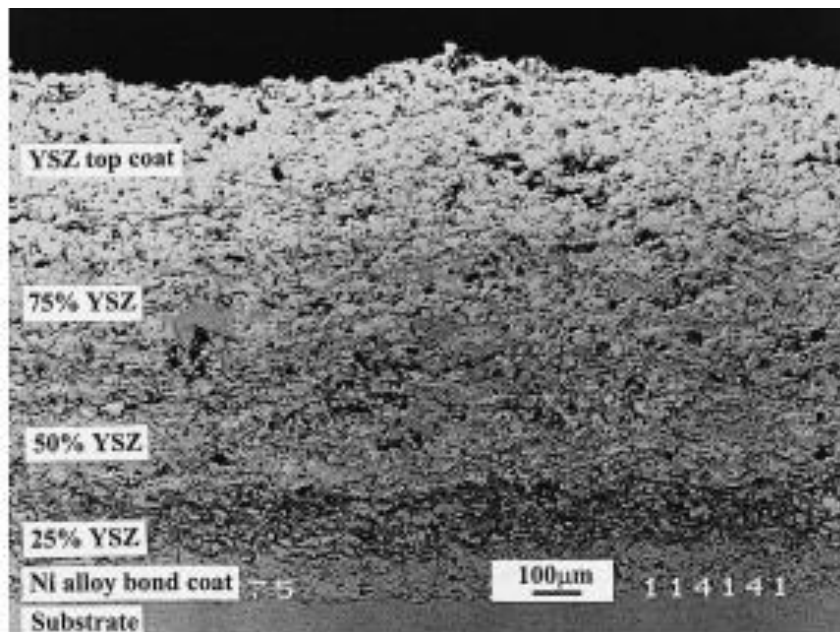
$$Q'_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\cos^2\theta\sin^2\theta$$

$$Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\sin^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\cos^3\theta\sin\theta$$

$$Q'_{66} = Q_{66}(\cos^4\theta + \sin^4\theta) + [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\cos^2\theta\sin^2\theta$$

### 2.1.3 Vật liệu phân cấp chức năng FGM (*Functionally Graded Material*)

Nhược điểm tập trung ứng suất được khắc phục đáng kể nếu sự thay đổi các đặc tính vật liệu diễn ra từ từ. Đây là cơ sở để hình thành và phát triển phần lớn các vật liệu phân cấp chức năng, ví dụ mô tả như Hình 2.5. Vật liệu phân cấp chức năng (FGM) có thể xem là một loại vật liệu composite đặc biệt với các đặc trưng vật liệu thay đổi liên tục nhằm mục đích cải thiện và tối ưu khả năng chịu tải trọng nhiệt và cơ của kết cấu. Loại vật liệu này được chế tạo với sự thay đổi dần dần theo quy luật gradient của cấu trúc nhằm đạt được những ưu điểm nổi trội của vật liệu thành phần [68-72].



**Hình 2.5:** Vật liệu phân cấp chức năng FGM, [69, 71]

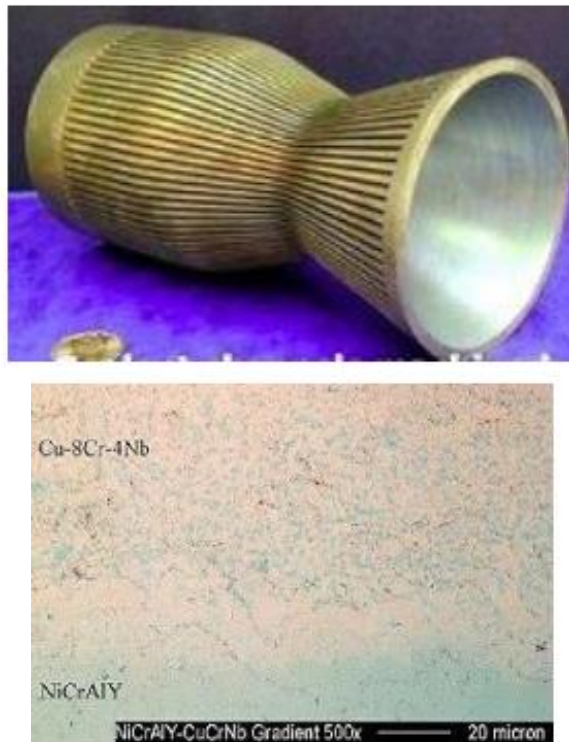
Vật liệu FGM thường được cấu tạo từ hai thành phần là kim loại (*metal*) và gốm (*ceramic*) với các đặc tính cơ học như Bảng 2.1.

**Bảng 2.1:** Những đặc tính của vật liệu thành phần gốm và kim loại

Vật liệu thành phần	Tính năng
Gốm	Chống oxy hóa cao, Dẫn nhiệt thấp, Chịu nhiệt cao.
Kim loại	Chịu lực lớn, Độ dẻo dai cao, Hệ số dẫn nhiệt cao.

---

Vật liệu FGM áp dụng nhiều đối với kết cấu làm việc trong môi trường khắc nghiệt như thiết bị đẩy phản lực, vỏ lò tinh luyện các loại xỉ, các bộ phận động cơ, quặng khai khoáng, thiết bị tiếp xúc với nguồn điện công suất lớn, lá chắn nhiệt của tàu vũ trụ,... Ví dụ như thiết bị chịu nhiệt cao truyền thống với một lớp vật liệu gốm tráng phủ lên kết cấu kim loại dễ dẫn đến sự tập trung ứng suất và hình thành biến dạng dẻo hoặc nứt do sự thay đổi đột ngột tính chất vật liệu tại vị trí tiếp xúc gây ra. Những nhược điểm đó có thể được khắc phục bằng cách điều chỉnh tính chất vật liệu thay đổi liên tục dựa trên các vật liệu thành phần. Cụ thể tại những vị trí cần các tính năng cơ học có tính dẻo dai, tính bền thì hàm lượng kim loại cao và ngược lại tại những vị trí cần chịu nhiệt và ăn mòn cao thì hàm lượng gốm cao,... Hình 2.6 thể hiện một sản phẩm của ngành vũ trụ trên cơ sở áp dụng vật liệu FGM.



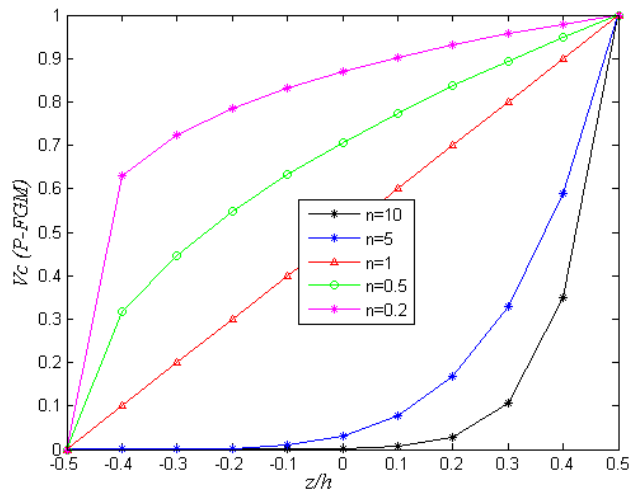
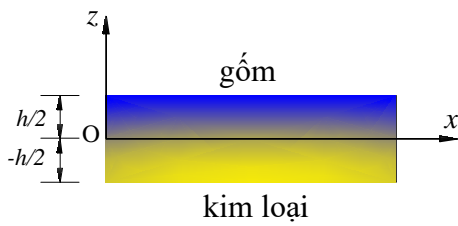
**Hình 2.6:** Hệ thống đẩy phản lực làm bằng vật liệu FGM, [66]

Có ba loại vật liệu phân cấp chức năng chính

- *Vật liệu P-FGM*

Đối với loại vật liệu FGM này mô hình kết cấu được chỉ ra trong Hình 2.7. Ở đó các thành phần kim loại và gốm được phân bố thông qua chiều dày kết cấu, một mặt giàu gốm và một mặt giàu kim loại, theo các tài liệu [68, 69, 72].

---



**Hình 2.7:** P-FGM

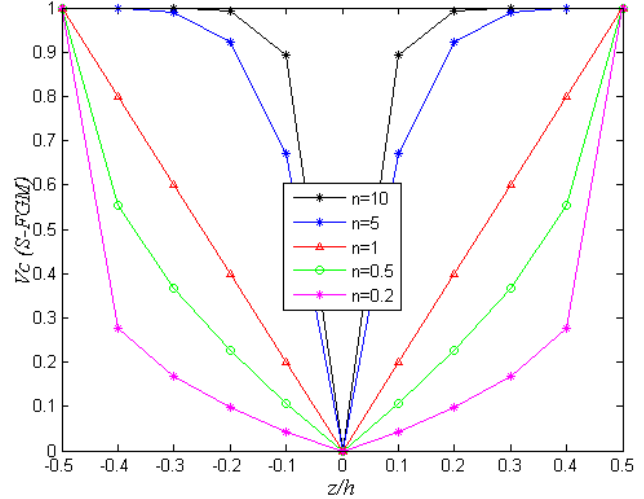
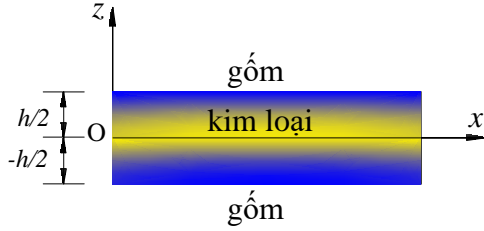
Ứng với một đơn vị thể tích kết cấu sẽ chứa tỉ phần thể tích kim loại  $V_m$  và tỉ phần thể tích gốm  $V_c$  thỏa  $V_c + V_m = 1$ , giả thiết biến đổi tỷ lệ thể tích của các thành phần vật liệu theo chiều dày kết cấu  $h$  dựa vào một hàm lũy thừa của biến chiều dày  $z$  (quy luật hàm mũ) như dưới đây

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + 0.5\right)^n, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad V_m(z) = 1 - V_c(z) \quad (2.7)$$

trong đó chỉ số dưới  $m$  và  $c$  tương ứng chỉ thành phần kim loại và gốm,  $n$  gọi là chỉ số tỷ lệ thể tích (*volume fraction index*) và là một số không âm. Theo quy luật phân bố vật liệu như công thức (2.7) khi  $n = 0$  kết cấu thuần nhất là gốm, khi tăng  $n$  thì tỷ lệ gốm trong kết cấu FGM giảm.

- *Vật liệu S-FGM*

Đối với loại vật liệu S-FGM này, nó còn được gọi là vật liệu FGM đối xứng phân bố theo quy luật hàm *Sigmoid* như Hình 2.8 và theo các tài liệu [68, 72, 73]. Kết cấu bao gồm mặt giữa giàu kim loại và được bao bọc bởi các mặt ngoài giàu gốm, tám hai lớp đối xứng tạo thành từ vật liệu FGM là một ví dụ như thế.



**Hình 2.8:** S-FGM

Tỷ lệ thể tích của các thành phần gốm và kim loại,  $V_c$  và  $V_m$  được giả thiết biến đổi theo quy luật hàm lũy thừa của biến chiều dày  $z$  (quy luật hàm Sigmoid, sử dụng quy luật hàm mũ cho 2 miền) như sau

$$V_m(z) = \begin{cases} \left(\frac{2z}{h} + 1\right)^n & , -h/2 \leq z \leq 0 \\ \left(\frac{-2z}{h} + 1\right)^n & , 0 \leq z \leq h/2 \end{cases}, \quad V_c(z) = 1 - V_m(z) \quad (2.8)$$

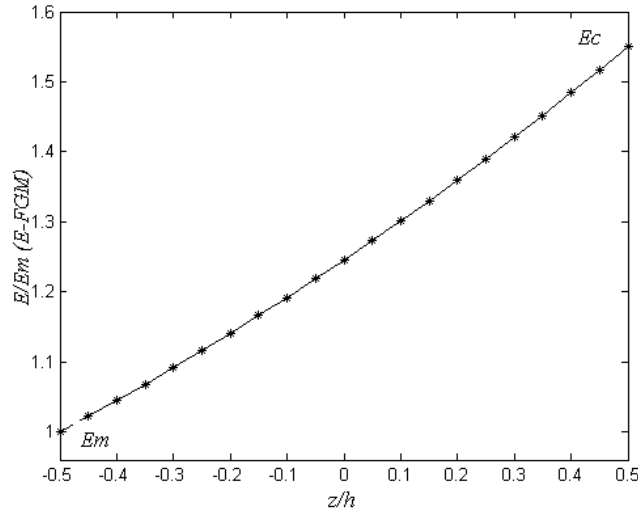
trong đó  $n$  có thể được chọn để xác định phân bố vật liệu tối ưu trong một ứng dụng cụ thể của kết cấu, là một số không âm và được gọi là chỉ số tỷ lệ thể tích. Theo quy luật phân bố vật liệu ở công thức (2.8) khi  $n = 0$  kết cấu thuần nhất kim loại, khi  $n = 1$  các thành phần vật liệu gốm và kim loại trong kết cấu phân bố tuyến tính qua chiều dày, và khi  $n$  tăng tỷ lệ gốm trong kết cấu FGM tăng.

- *Vật liệu E-FGM*

Đối với loại vật liệu E-FGM thì mô đun đàn hồi của nó được giả thiết tuân theo quy luật hàm siêu việt (hàm  $e$  mũ) như Hình 2.9 và theo các tài liệu [68, 72, 74]

$$E(z) = A e^{B\left(\frac{z+h}{2}\right)}, \quad A = E_t, \quad B = \frac{1}{h} \ln\left(\frac{E_b}{E_t}\right) \quad (2.9)$$

với  $E_b$  là mô đun đàn hồi của tấm ở mặt dưới,  $E_t$  là mô đun đàn hồi của tấm ở mặt trên của kết cấu FGM.

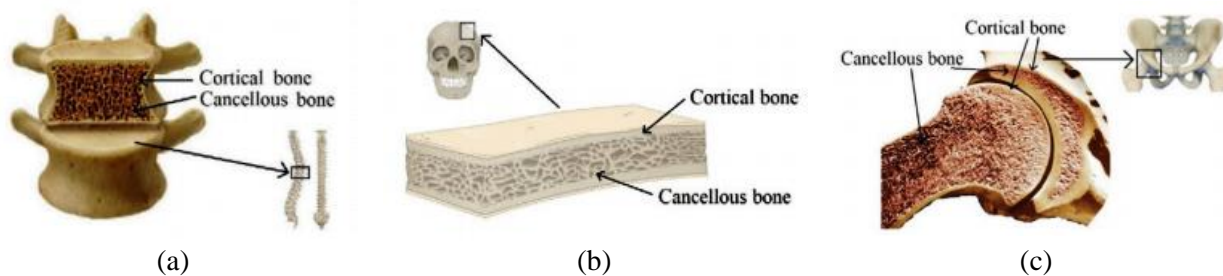


**Hình 2.9:** E-FGM

Phạm vi luận án chỉ xét vật liệu chức năng FGM thông thường tức là loại P-FGM.

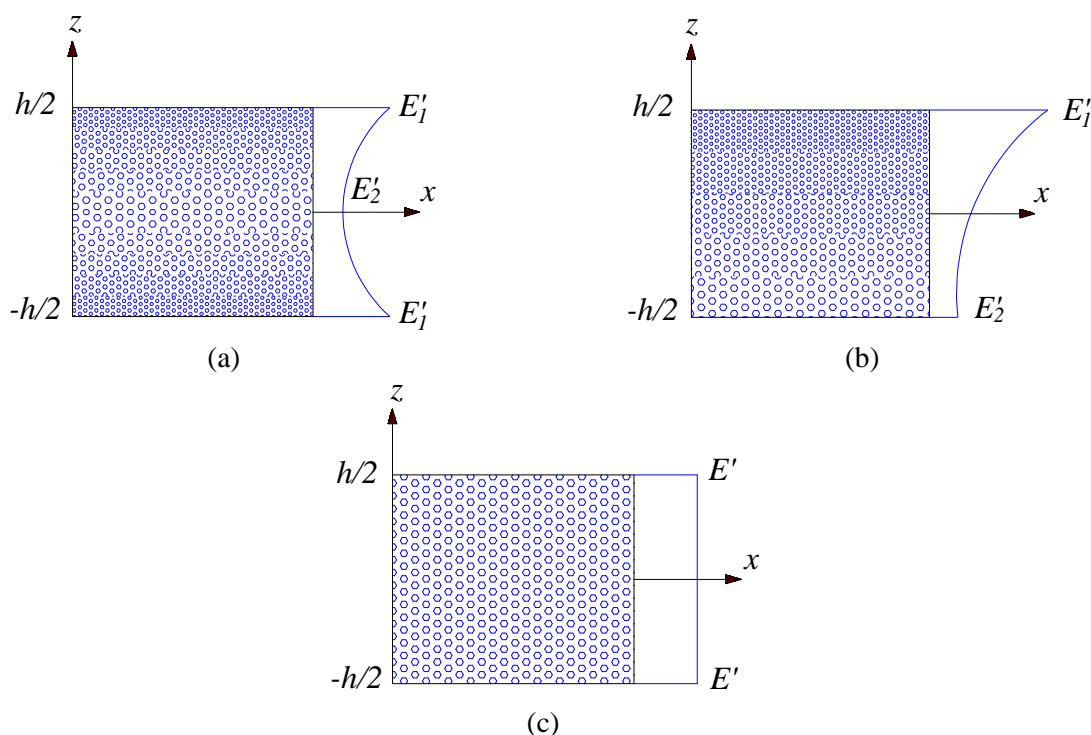
#### **2.1.4 Vật liệu xếp phân cấp chức năng FGP (*Functionally Graded Porous*) có gia cường tấm siêu cầu graphene (*Graphene Platelets*)**

Trong những năm gần đây, vật liệu xốp nhân tạo là một trong những vật liệu composite ưu tú nhất nhờ sở hữu sự kết hợp siêu việt giữa các tính chất cơ lý. Đặc biệt, "*metal foams*", một trong những vật liệu có độ xốp cao với cấu trúc tế bào, đã thể hiện tiềm năng phi thường để đạt được sự cải thiện đáng kể về độ cứng cấu trúc,...[75, 76] Thành tựu của "*metal foams*" đã được thương mại hóa rộng rãi trong xã hội. Các đặc tính của vật liệu có độ bền cao nhưng trọng lượng nhẹ để ứng dụng trong kỹ thuật hàng không vũ trụ, thiết kế tương thích sinh học của mô nhân tạo và cấy ghép xương trong kỹ thuật y sinh là ba ví dụ nổi bật nhất trên thế giới. Sau đó, ý tưởng về độ xốp phân cấp theo chức năng (FGP) được đề xuất để dễ kiểm soát hơn và do đó, các đặc tính cơ học có thể đạt được bằng cách thay đổi tỉ mỉ mật độ và kích thước của các lỗ xốp trong bột kim loại. Một số hình ảnh thực tế được minh họa trong Hình 2.10 với [77] liên quan đến hoạt động ghép xương bao gồm cả xương cứng bên ngoài và xương xốp bên trong. FGP đã tạo cơ hội để kiểm soát các đặc tính vật liệu của "*metal foams*" nhưng trên thực tế, độ bền của vật liệu FGP đó có thể bị tổn hại đáng kể. Một cách tiếp cận phổ biến để khôi phục độ bền của FGP là gia cố bằng ống nano cacbon (CNTs) hoặc siêu cầu graphene (GPLs).



**Hình 2.10:** Cấu trúc xương làm từ FGP: (a) đốt sống, (b) hộp sọ và (c) xương chậu, [77]

Kết cấu làm từ vật liệu xốp phân cấp chức năng được gia cường bằng tiểu cầu graphene được gọi tắt là kết cấu FGP-GPLs. Dọc theo chiều dày của kết cấu có ba loại phân bố độ xốp là P-S, P-A và P-U như Hình 2.11.



**Hình 2.11:** a) P-S, b) P-A và c) P-U

Mật độ khối lượng, mô đun Young, mô đun đàn hồi cắt được đưa ra

$$\begin{aligned}
 \rho(z) &= \rho^s [1 - e_m \psi(z)] \\
 G(z) &= G^s [1 - e_o \psi(z)] \\
 E(z) &= E^s [1 - e_o \psi(z)]
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

với  $\psi(z)$  được gọi là hàm phân phối độ xốp



$$\psi(z) = \begin{cases} \cos(\pi z / h) & , \text{ P-S} \\ \cos(\pi z / 2h + \pi / 4) & , \text{ P-A} \\ \psi & , \text{ P-U} \end{cases} \quad (2.11)$$

$E^s$ ,  $G^s$  và  $\rho^s$  theo thứ tự là những giá trị lớn nhất của mô đun Young, mô đun đàn hồi cắt và mật độ khối lượng của kết cấu FGP-GPLs. Hệ số xấp  $e_0$  được định nghĩa

$$e_0 = 1 - E_2' / E_1' \quad (2.12)$$

trong đó  $E_1'$  và  $E_2'$  là mô đun Young hữu hiệu nhỏ nhất và lớn nhất ứng với hai loại phân bố  $P-S$  và  $P-A$  khi không gia cường tiêu cầu graphene như mô tả Hình 2.11. Dựa vào luật phân phối ngẫu nhiên của Gauss [77-79]

$$E(z) / E^s = \left( (\rho(z) / \rho^s + 0.121) / 1.121 \right)^{2.3}, \quad 0.15 < \rho(z) / \rho^s < 1 \quad (2.13)$$

Ngoài ra, hệ số phân bố khối lượng

$$e_m = 1.121 \left( 1 - \sqrt[2.3]{1 - e_0 \psi(z)} \right) / \psi(z) \quad (2.14)$$

và hệ số Poisson

$$\begin{aligned} \mu(z) &= 0.221\vartheta + \mu^s (0.342\vartheta^2 - 1.21\vartheta + 1) \\ \vartheta &= 1.121 \left( 1 - \sqrt[2.3]{1 - e_0 \psi(z)} \right) \end{aligned} \quad (2.15)$$

với  $\mu^s$  là hệ số Poisson khi xem xét vật liệu không xấp. Cần nhấn mạnh rằng tổng khối lượng kết cấu không thay đổi giữa các loại phân bố xấp nên theo [79, 80]

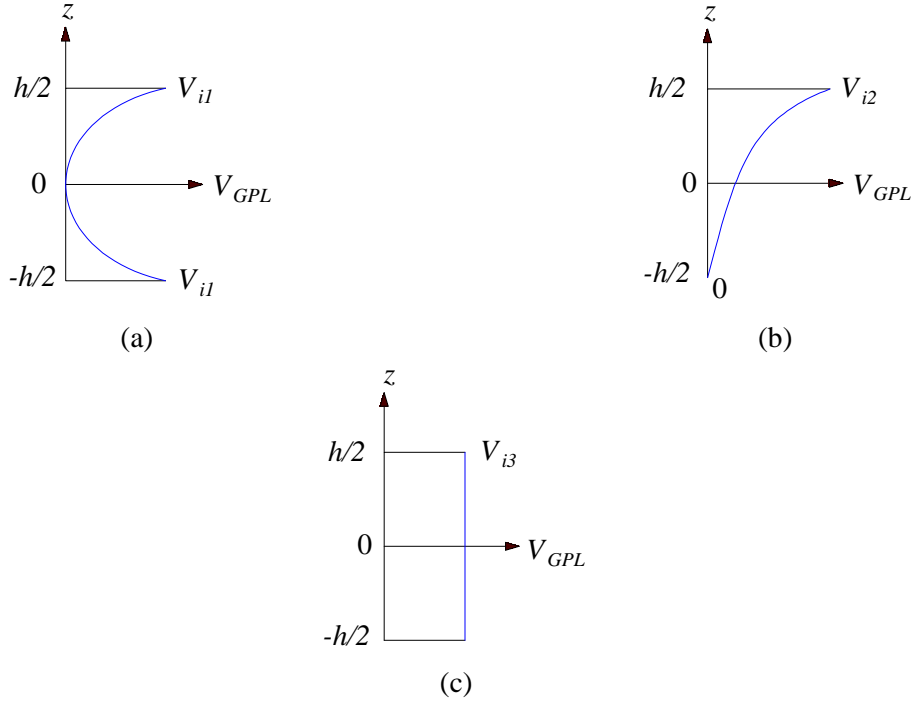
$$\psi = \left[ - \left( (M / \rho^s h + 0.121) / 1.121 \right)^{2.3} + 1 \right] / e_0 \quad (2.16)$$

$$M = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$$

Liên quan đến sự phân bố tiêu cầu graphene

$$V_{GPL}(z) = \begin{cases} V_{i1} [-\cos(\pi z / h) + 1] & , \text{ GPL-S} \\ V_{i2} [-\cos(\pi z / 2h + \pi / 4) + 1] & , \text{ GPL-A} \\ V_{i3} & , \text{ GPL-U} \end{cases} \quad (2.17)$$

Ba loại phân bố tiêu cầu graphene  $GPL-S$ ,  $GPL-A$  và  $GPL-U$  được thể hiện như trong Hình 2.12.



**Hình 2.12:** a) GPL-S, b) GPL-A và c) GPL-U

Giá trị  $WF_{(GPL)}$  được tính toán thông qua

$$\begin{aligned} & \left[ WF_{(GPL)}\rho_m / (WF_{(GPL)}\rho_m + \rho_{GPL} - WF_{(GPL)}\rho_{GPL}) \right] \\ & \times \int_{-h/2}^{h/2} [1 - e_m \psi(z)] dz = \int_{-h/2}^{h/2} V_{GPL}(z) [1 - e_m \psi(z)] dz \end{aligned} \quad (2.18)$$

Theo mô hình Halpin-Tsai [81, 82]

$$E^s = E_m \left\{ 3 \left[ (1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}) / (1 - \eta_L V_{GPL}) \right] + 5 \left[ (1 + \xi_W \eta_W V_{GPL}) / (1 - \eta_W V_{GPL}) \right] \right\} / 8 \quad (2.19)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \eta_W &= \left[ (E_{GPL} / E_m - 1) / (E_{GPL} / E_m + \xi_W) \right], \quad \eta_L = \left[ (E_{GPL} / E_m - 1) / (E_{GPL} / E_m + \xi_L) \right] \\ \xi_W &= 2w_{GPL} / t_{GPL}, \quad \xi_L = 2l_{GPL} / t_{GPL} \end{aligned} \quad (2.20)$$

với  $l_{GPL}$ ,  $t_{GPL}$  và  $w_{GPL}$  lần lượt là chiều dài, chiều dày và chiều rộng trung bình của GPLs;  $E_{GPL}$  là mô đun Young của GPLs. Bên cạnh đó, hệ số Poisson  $\mu^s$  và mật độ khối lượng  $\rho^s$  của kết cấu FGP-GPLs được thể hiện như dưới

$$\begin{aligned} \mu^s &= \mu_{GPL} V_{GPL} + \mu_m V_m \\ \rho^s &= \rho_{GPL} V_{GPL} + \rho_m V_m \\ V_m &= 1 - V_{GPL} \end{aligned} \quad (2.21)$$

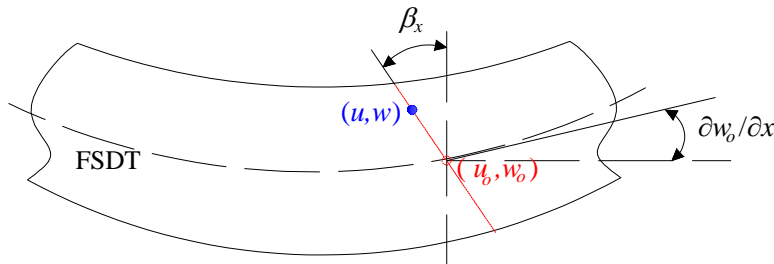
## 2.2 Lý thuyết tấm/vỏ

### 2.2.1 Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*)

Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất hay là lý thuyết Reissner-Mindlin có kể đến biến dạng cắt ngang. Trường chuyển vị được mô tả như sau

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\beta_x + u_0(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\beta_y + v_0(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.22)$$

với  $u_0, v_0, w_0$  là ba thành phần chuyển vị thẳng của một điểm nằm trên mặt trung hòa và  $\beta_x$  và  $\beta_y$  là các chuyển vị xoay quanh trục  $x$  và trục  $y$  như Hình 2.13. Trên cơ sở trường chuyển vị không sử dụng đạo hàm như thể hiện ở các công thức của (2.22) nên chỉ cần liên tục bậc  $C^0$ , theo [2, 4, 5, 35]. Tuy nhiên tính chính xác của lý thuyết phụ thuộc nhiều vào hệ số hiệu chỉnh cắt. Lý thuyết này được sử dụng trong các chương 4, 5 và 6 cho việc xây dựng các phần tử SQ4T, SQ4C và SQ4P.



Hình 2.13: Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT)

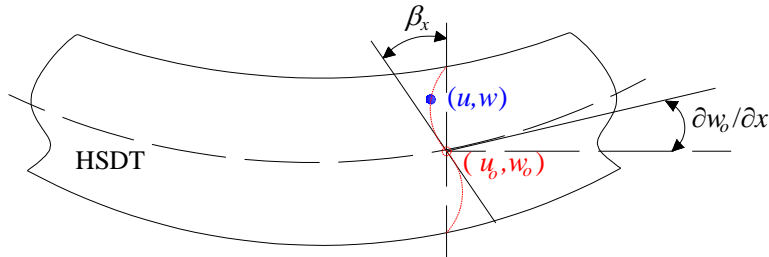
### 2.2.2 Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT (*Higher-order Shear Deformation Theory*)

Để vượt qua hạn chế của lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) như Hình 2.14 ra đời và không đòi hỏi hệ số hiệu chỉnh cắt. Sau đây là trường chuyển vị của lý thuyết biến dạng cắt bậc ba (TSDT) của Reddy [2], một trong những lý thuyết dùng trong phân tích kết cấu tấm/vỏ

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\beta_x - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\beta_y - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y)$$

Với sự xuất hiện đạo hàm trong các công thức của (2.23), các công thức phần tử hữu hạn áp dụng cho lý thuyết này thường đòi hỏi hàm xấp xỉ liên tục  $C^1$ . Điều này dẫn đến sự phức tạp trong xây dựng hàm xấp xỉ cũng như đòi hỏi thời gian tính toán khá lâu. Cách khắc phục sẽ thể hiện rõ hơn trong chương 3 với phần tử SQ4H.



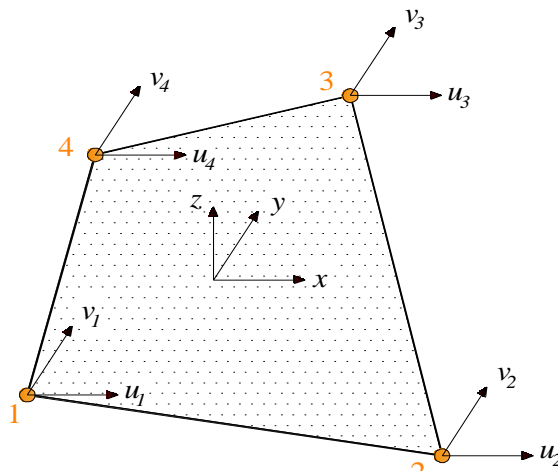
**Hình 2.14:** Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT)

## 2.3 Công thức phần tử hữu hạn

Trong mục này, một số công thức phần tử hữu hạn cơ bản sử dụng trong luận án được mô tả nhằm cung cấp một cái nhìn tổng quan về các phần tử màng, phần tử tấm uốn và phần tử vỏ phẳng. Cuối cùng là các phương trình phần tử hữu hạn dùng trong phân tích uốn tĩnh, phân tích dao động tự do và phân tích ổn định.

### 2.3.1 Phần tử màng tứ giác đẳng tham số

Các công thức phần tử hữu hạn của phần tử màng tứ giác đẳng tham số được xem xét ngắn gọn cho các bài toán ứng suất phẳng. Phần tử tứ giác bốn nút với hai bậc tự do trên mỗi nút như thể hiện trong Hình 2.15 và theo các tài liệu [5, 83]



**Hình 2.15:** Phần tử màng tứ giác đẳng tham số

Xấp xỉ chuyển vị trong mặt phẳng theo 2 phương  $x$  và  $y$  được xác định như sau

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i \\ v &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i \end{aligned} \quad (2.24)$$

với  $N_i(\xi, \eta) = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)/4$  là hàm dạng của phân tử.

Trường biến dạng màng thu được bằng các đạo hàm của chuyển vị

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{B}_m \mathbf{q} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi} \mathbf{q}_i \quad (2.25)$$

trong đó  $\mathbf{u} = [u \quad v]^T$ ,  $\mathbf{q}_i = [u_i \quad v_i]^T$  là véc-tơ chuyển vị nút và  $\mathbf{B}_m$  là ma trận liên hệ giữa biến dạng và chuyển vị màng.

$$\mathbf{B}_{mi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Đối với vật liệu đẳng hướng đàn hồi tuyến tính, ứng suất có thể thu được

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m \quad (2.27)$$

Thế năng toàn phần được tính toán như sau

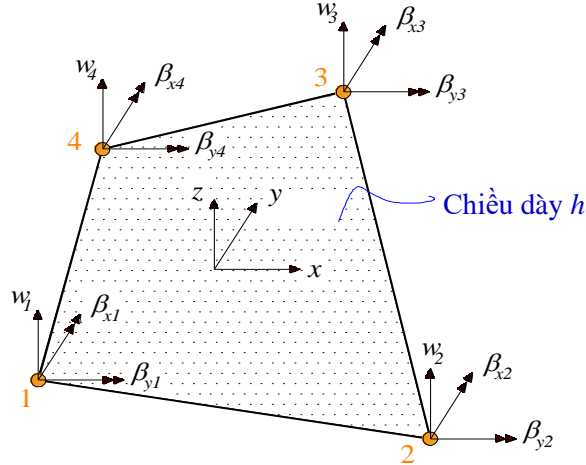
$$\Pi_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{q}^T \mathbf{b} d\Omega \quad (2.28)$$

Cực tiểu thế năng toàn phần suy ra ma trận độ cứng màng của phần tử và véc-tơ lực nút

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m d\Omega \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b d\Omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

### 2.3.2 Phần tử tấm tứ giác uốn có kể biến dạng cắt

Trong phần này, phần tử tấm uốn bốn nút dựa trên lý thuyết Mindlin-Reissner được trình bày. Phần tử thể hiện như trong Hình 2.16 và theo các tài liệu [5, 83]. Mỗi nút của phần tử sở hữu ba bậc tự do, cụ thể là chuyển vị ngang  $w$  và các chuyển vị xoay  $\beta_x, \beta_y$ .



Hình 2.16: Phần tử tấm uốn

Trường chuyển vị  $\mathbf{u}$  của tấm được nội suy như sau

$$\mathbf{u} = [w \quad \beta_x \quad \beta_y]^T = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \mathbf{q}_i \quad (2.30)$$

với  $\mathbf{N}_i$  là hàm dạng song tuyến tính và  $\mathbf{q}_i = [w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]$  là véc-tơ chuyển vị nút của phần tử. Giá trị xấp xỉ của biến dạng được tính toán

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_b \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s &= \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_s \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.31)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{bi} &= \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{si} &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mối quan hệ ứng suất-biến dạng đàn hồi tuyến tính cho vật liệu đồng chất và đẳng hướng

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (2.33)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s$$

Thế năng toàn phần với lực ngang trên một đơn vị diện tích  $\mathbf{p}$  được tính toán như sau

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega-h/2}^{h/2} \int \boldsymbol{\sigma}_b^T \boldsymbol{\varepsilon}_b dz d\Omega + \frac{k_s}{2} \int_{\Omega-h/2}^{h/2} \int \boldsymbol{\sigma}_s^T \boldsymbol{\varepsilon}_s dz d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \mathbf{w} d\Omega \quad (2.34)$$

với  $k_s = \frac{5}{6}$  là hệ số hiệu chỉnh cắt. Có thể viết lại thế năng toàn phần dưới dạng

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \mathbf{w} d\Omega \quad (2.35)$$

trong đó  $\mathbf{D}_b$  và  $\mathbf{D}_s$  là ma trận vật liệu cho phần uốn và cắt

$$\mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{k_s Eh}{2(1+\mu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cực tiểu thế năng toàn phần suy ra ma trận độ cứng của phần tử và véc-tơ lực nút

$$\mathbf{K}_p = \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega = \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (2.37)$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega$$

### 2.3.3 Phần tử vỏ phẳng

Hai phần tử trên có thể kết hợp với nhau để hình thành nên phần tử vỏ tứ giác 4 nút phẳng. Khi tất cả các nút của phần tử vỏ phẳng nằm trên bề mặt trung hòa của kết cấu vỏ thì ma trận độ cứng của phần tử này có thể được xác định đơn giản như sau

$$\mathbf{K}_{shell} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_p \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Đối với vỏ cong hai phương do 4 nút của phần tử không cùng mặt phẳng nên cần hiệu chỉnh ma trận độ cứng phần tử trước khi chuyển sang hệ quy chiếu tổng thể. Mặt phẳng chiếu được xác định thông qua các trung điểm các cạnh phần tử sau đó hiệu chỉnh véc-tơ chuyển vị nút theo tác giả Nguyen-Van [5] và tác giả Taylor [84], xem Hình 2.17

$$\mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} u_i' \\ v_i' \\ w_i' \\ \beta_{xi}' \\ \beta_{xi}' \\ \beta_{xi}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -z_i & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \beta_{xi} \\ \beta_{xi} \\ \beta_{xi} \end{Bmatrix} = \mathbf{W}_i \mathbf{q}_i \quad (2.39)$$

Ma trận độ cứng của phần tử trong hệ tọa độ địa phương được viết lại

$$\mathbf{K}_{local} = \mathbf{W} \mathbf{K}_{shell} \mathbf{W}^T \quad (2.40)$$

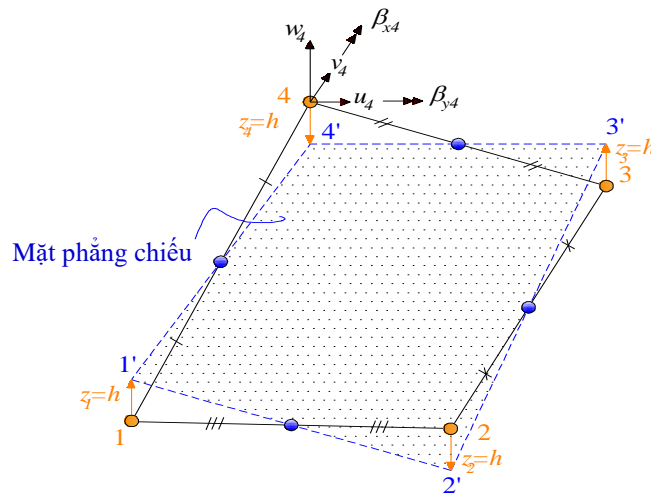
Chuyển từ hệ tọa độ địa phương sang hệ tọa độ tổng thể, ma trận độ cứng phần tử thể hiện như sau

$$\mathbf{K}_{global} = \mathbf{R}^T \mathbf{K}_{local} \mathbf{R} \quad (2.41)$$

với

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

$c_{ij}$  là cosine của góc hợp bởi trục địa phương  $x_i$  và trục tổng thể  $X_j$ .



**Hình 2.17:** Phép chiếu xuống mặt phẳng trung hòa



Một lưu ý tiếp theo liên quan đến việc không có độ cứng tương ứng với bậc tự do xoay trong mặt phẳng phần tử  $\beta_z$ . Sự thiếu hụt này dẫn đến tình trạng suy biến của ma trận độ cứng tổng thể khi tất cả các phần tử là đồng phẳng. Một phương pháp đơn giản để khắc phục tình trạng này là chèn một độ cứng giả định nhỏ vào mỗi bậc tự do xoay  $\beta_z$  theo các tác giả Zienkiewicz và Taylor [85]. Giá trị giả định không được quá bé để cho ma trận sau khi sửa đổi không còn là một ma trận suy biến. Đồng thời, giá trị trên cũng không quá lớn nhằm tránh ảnh hưởng đến độ chính xác của kết quả phân tích. Từ đó ma trận độ cứng tại nút  $i$  của phần tử được viết lại dưới đây

$$\mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_m)_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 3} & 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 2} & (\mathbf{K}_p)_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-3} \max(\mathbf{K}_{i,i}) \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

### 2.3.4 Công thức phần tử hữu hạn trong phân tích uốn tĩnh, dao động tự do và ổn định

Dựa vào các tài liệu [4, 5, 35, 83], công thức phần tử hữu hạn dùng cho phân tích uốn tĩnh, dao động tự do và ổn định được trình bày như sau:

Trường hợp phân tích uốn tĩnh, thế năng toàn phần của tấm dưới tác dụng tải ngang  $\mathbf{p}$  được viết bởi

$$\Pi_{ut} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{p} w d\Omega \quad (2.44)$$

Trường hợp phân tích dao động tự do, thế năng toàn phần của tấm được viết dưới dạng

$$\Pi_{td} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{u}^T m \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (2.45)$$

Trường hợp phân tích ổn định, thế năng toàn phần của tấm cũng được thể hiện như sau

$$\Pi_{od} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}_m^T \mathbf{D}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_b^T \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b + \boldsymbol{\varepsilon}_s^T \mathbf{D}_s \boldsymbol{\varepsilon}_s) d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_g^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_g d\Omega \quad (2.46)$$

với

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \begin{bmatrix} h\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & h^3\sigma_0/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3\sigma_0/12 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_g = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 & 0 \\ w_{,y} & 0 & 0 \\ 0 & \beta_{,xx} & 0 \\ 0 & \beta_{,xy} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{,yx} \\ 0 & 0 & \beta_{,yy} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Khảo sát miền bài toán  $\Omega$  được rời rạc thành  $n_e$  miền con. Dựa trên mô hình phần tử tứ giác 4 nút kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT, nghiệm  $\mathbf{u}$  được xấp xỉ

$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w \quad \beta_x \quad \beta_y]^T = \sum_{i=1}^4 \mathbf{N}_i \mathbf{q}_i \quad (2.48)$$

trong đó  $\mathbf{N}_i$  là hàm dạng song tuyến tính,  $\mathbf{q}_i = [\mathbf{q}_{mi} \quad \mathbf{q}_{bi}]^T$ ,  $\mathbf{q}_{mi} = [u_i \quad v_i]^T$ ,  $\mathbf{q}_{bi} = [w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]^T$  là các véc-tơ chuyển vị của phần tử. Xấp xỉ biến dạng màng, uốn, cắt và hình học

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \mathbf{B}_m \mathbf{q}_m, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{q}_b, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{B}_s \mathbf{q}_b, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_g = \mathbf{B}_g \mathbf{q}_b \quad (2.49)$$

với  $\mathbf{B}_{mi}$ ,  $\mathbf{B}_{bi}$ ,  $\mathbf{B}_{si}$  như công thức (2.26), (2.32) và

$$\mathbf{B}_{gi} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} \\ 0 & 0 & N_{i,y} \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Cực tiểu năng lượng từ các phương trình (2.44÷2.46), công thức phần tử hữu hạn dùng để phân tích tĩnh

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (2.51)$$

với  $\mathbf{K}$  là ma trận độ cứng tổng và  $\mathbf{F}$  là véc-tơ lực

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{D}_m \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Omega = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_b + \mathbf{K}_s \quad (2.52)$$

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega$$

Công thức phần tử hữu hạn dùng để phân tích dao động tự do

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q} = 0 \quad (2.53)$$

Với  $\omega$  là tần số tự nhiên và  $\mathbf{M}$  là ma trận khối lượng tổng thể

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega$$

$$\mathbf{m} = \rho h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^2/12 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

Công thức phân tử hữu hạn dùng để phân tích ổn định

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{q} = 0 \quad (2.55)$$

Với  $\lambda$  là lực tới hạn và  $\mathbf{K}_g$  là ma trận độ cứng hình học tổng thể

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{B}_g^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \mathbf{B}_g d\Omega \quad (2.56)$$

---

## Chương 3

# PHẦN TỬ SQ4H

### 3.1 Giới thiệu

Trong chương này lần lượt trình bày lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT của Reddy được cải biên thành C<sup>0</sup>-HSDT, xây dựng phần tử tứ giác SQ4H (*Sort...Q4...C<sup>0</sup>-HSDT*) dựa trên cải biên C<sup>0</sup>-HSDT kết hợp kỹ thuật làm trơn biến dạng trên miền con phần tử, kết quả tính toán số minh họa, so sánh và đánh giá. Cuối cùng là những kết luận cho phần tử này.

### 3.2 Kỹ thuật cải biên HSDT thành C<sup>0</sup>-HSDT

Lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT của Reddy [2] được trình bày như sau

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 + z\beta_y + z^2\xi_x(x, y) + z^3\zeta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0 - z\beta_x + z^2\xi_y(x, y) + z^3\zeta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (3.1)$$

Trong đó  $u$ ,  $v$  và  $w$  là các chuyển vị theo phương  $x$ ,  $y$  và  $z$ .

$\xi_x$ ,  $\xi_y$ ,  $\zeta_x$  và  $\zeta_y$  là các hàm được xác định từ điều kiện ứng suất tiếp thẳng góc bằng 0 ở mặt dưới và mặt trên của tấm

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= 0, \quad z = \pm h/2 \\ \tau_{yz} &= 0, \quad z = \pm h/2 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Từ mối quan hệ giữa biến dạng trượt và ứng suất tiếp suy ra

$$\begin{aligned} \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} \quad \text{với} \quad \gamma_{xz} = \beta_y + 2z\xi_x + 3z^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \quad \text{với} \quad \gamma_{yz} = -\beta_x + 2z\xi_y + 3z^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Điều kiện (3.2) dẫn đến

$$\gamma_{xz}|_{h/2} = \beta_y + 2\frac{h}{2}\xi_x + 3\left(\frac{h}{2}\right)^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}\Big|_{-h/2} &= \beta_y - 2\frac{h}{2}\xi_x + 3\left(-\frac{h}{2}\right)^2\zeta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz}\Big|_{h/2} &= -\beta_x + 2\frac{h}{2}\xi_y + 3\left(\frac{h}{2}\right)^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \gamma_{yz}\Big|_{-h/2} &= -\beta_x - 2\frac{h}{2}\xi_y + 3\left(-\frac{h}{2}\right)^2\zeta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

Từ (3.4) suy ra

$$\begin{aligned}\xi_x &= 0 \text{ và } \xi_y = 0 \\ \zeta_x &= -\frac{4}{3h^2}\left(\beta_y + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \text{ và } \zeta_y = -\frac{4}{3h^2}\left(-\beta_x + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (3.5)$$

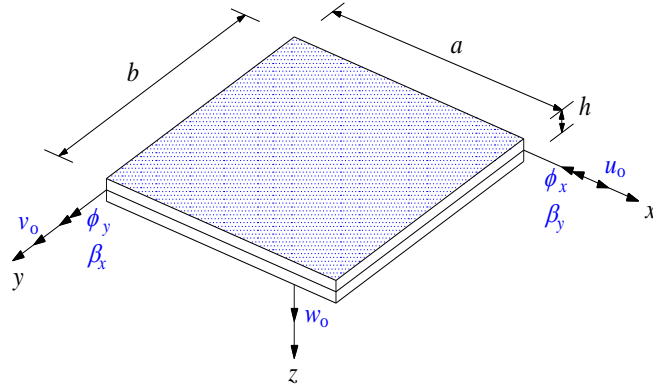
Thay các biểu thức ở (3.5) vào (3.1)

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0 + z\beta_y - \frac{4}{3h^2}z^3\left(\beta_y + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) \\ v(x, y, z) &= v_0 - z\beta_x - \frac{4}{3h^2}z^3\left(-\beta_x + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) \\ w(x, y, z) &= w_0\end{aligned}\quad (3.6)$$

Bằng cách đặt  $\partial w_0 / \partial x = \phi_x$  và  $\partial w_0 / \partial y = \phi_y$ , công thức (3.6) được viết lại

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= u_0 + \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right)\beta_y - \frac{4z^3}{3h^2}\phi_x \\ v(x, y, z) &= v_0 - \left(z - \frac{4z^3}{3h^2}\right)\beta_x - \frac{4z^3}{3h^2}\phi_y \\ w(x, y, z) &= w_0\end{aligned}\quad (3.7)$$

Các công thức phân tử hữu hạn áp dụng cho HSDT thường đòi hỏi hàm xấp xỉ liên tục bậc cao. Điều này dẫn đến sự phức tạp khi xây dựng hàm xấp xỉ phân tử hữu hạn. Để khắc phục những hạn chế này, tác giả Reddy đã đề xuất một hình thức tính khác áp dụng cho HSDT mà chỉ đòi hỏi hàm xấp xỉ dạng tham số  $C^0$  hay được gọi là  $C^0$ -HSDT. Trong  $C^0$ -HSDT, hai biến độc lập được bổ sung để biểu diễn đạo hàm của chuyển vị. Theo (3.7) trường chuyển vị bây giờ sẽ bao gồm 7 ẩn số  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\beta_x$ ,  $\beta_y$ ,  $\phi_x$  và  $\phi_y$  độc lập nhau như Hình 3.1.



**Hình 3.1:** Chiều dương quy ước của các chuyển vị thẳng và xoay trong tấm

### 3.3 Xây dựng phần tử SQ4H

Phần tử tứ giác SQ4H bao gồm 4 nút trong đó mỗi nút có 7 bậc tự do được xây dựng dựa vào kỹ thuật làm tròn biến dạng ở miền con của phần tử theo [4, 5, 32, 35] trên nền tảng  $C^0$ -HSDT kết hợp lý thuyết của Von-Kármán liên quan đến biến dạng nhỏ-chuyển vị lớn để phân tích phi tuyến kết cấu tấm composite nhiều lớp dẹt phẳng và gập.

Véc-tơ biến dạng trong mặt phẳng được trình bày

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \\ v_{,y} + \frac{1}{2}w_{,y}^2 \\ u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Có thể viết tóm tắt lại như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_{b1} - \frac{4}{3h^2}z^3\boldsymbol{\varepsilon}_{b2} \quad (3.9)$$

với

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}w_{0,x}^2 \\ \frac{1}{2}w_{0,y}^2 \\ w_{0,x}w_{0,y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^L + \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b1} = \begin{Bmatrix} \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{b2} = \begin{bmatrix} \beta_{y,x} + \phi_{x,x} \\ -\beta_{x,y} + \phi_{y,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} + \phi_{x,y} + \phi_{y,x} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{0,x} & 0 \\ 0 & w_{0,y} \\ w_{0,y} & w_{0,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\theta}$$

Ngoài ra, véc-tơ biến dạng cắt ngang cũng được trình bày

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} + z^2 \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \quad (3.11)$$

trong đó

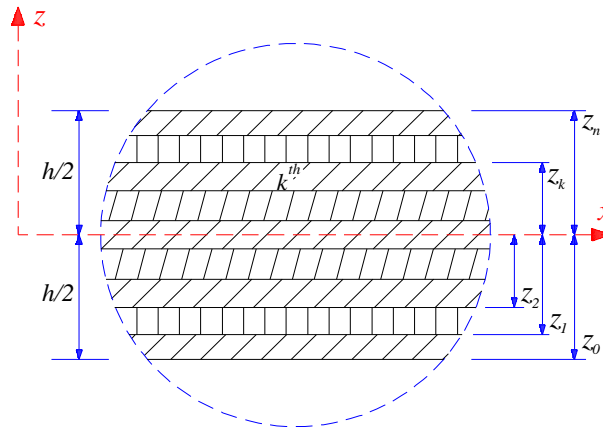
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s1} = \begin{bmatrix} w_{0,x} + \beta_y \\ w_{0,y} - \beta_x \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{s2} = -\frac{4}{h^2} \begin{bmatrix} \phi_x + \beta_y \\ \phi_y - \beta_x \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Tóm lại biến dạng tổng được đưa ra như dưới đây

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^L + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{NL} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L & \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (3.13)$$

Lưu ý các ký hiệu  $m$ ,  $b$ ,  $s$  lần lượt đề cập đến trạng thái màng (*membrane*), uốn (*bending*) và cắt (*shearing*) cũng như ký hiệu  $L$ ,  $NL$  thể hiện thành phần tuyến tính (*linear*) và phi tuyến hình học (*non-linear*) ở các công thức theo như danh mục ký hiệu ở đầu luận án.



**Hình 3.2:** Vật liệu composite cốt sợi nhiều lớp

Vì vật liệu composite cốt sợi nhiều lớp như Hình 3.2 được áp dụng trong chương này nên các thành phần nội lực của tấm được thể hiện theo công thức sau

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{M}_0 \\ \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{R}_0 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & c_1 \mathbf{E} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & c_1 \mathbf{F} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ c_1 \mathbf{E} & c_1 \mathbf{F} & c_1^2 \mathbf{H} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_2 \hat{\mathbf{A}} & c_2 \hat{\mathbf{B}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & c_2 \hat{\mathbf{B}} & c_2^2 \hat{\mathbf{D}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}^*} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

với

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz, \quad (\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{H}) = \int_{-h/2}^{h/2} (z^3, z^4, z^6) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \\ (\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{D}}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \\ c_1 &= -\frac{4}{3h^2}, \quad c_2 = -\frac{4}{h^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dựa vào FEM, chuyển vị trong phần tử được tính toán thông qua chuyển vị nút của phần tử đó

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \mathbf{q}_i \quad (3.16)$$

với

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{q}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}]$$

Các véc-tơ biến dạng màng, biến dạng uốn và biến dạng cắt được thể hiện

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^L \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{b1} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{b1i} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{b2} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{b2i} \mathbf{q}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{mi}^{NL} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s1} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s1i} \mathbf{q}_i & \boldsymbol{\varepsilon}_{s2} &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_{s2i} \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (3.18)$$

trong đó

$$\mathbf{B}_{mi}^L = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$



$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{bli} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{b2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,y} & 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & -N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{mi}^{NL} = \Psi \mathbf{G}_i &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{sli} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & -N_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{B}_{s2i} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i & 0 & 0 & N_i \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Có thể diễn giải thành phân phi tuyến bởi

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \frac{1}{2} d\Psi\boldsymbol{\theta} + \frac{1}{2} \Psi d\boldsymbol{\theta} \\
d\Psi\boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} w_{,x} dw_{,x} \\ w_{,y} dw_{,y} \\ w_{,x} dw_{,y} + w_{,y} dw_{,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{,x} & 0 \\ 0 & w_{,y} \\ w_{,y} & w_{,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dw_{,x} \\ dw_{,y} \end{Bmatrix} = \Psi d\boldsymbol{\theta}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \Psi d\boldsymbol{\theta} \\
\boldsymbol{\theta} &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 \\ N_{i,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{q}_b \\
d\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL} &= \Psi d\boldsymbol{\theta} = \underbrace{\Psi \mathbf{G}}_{\mathbf{B}_m^{NL}} d\mathbf{q}_b
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Dựa vào kỹ thuật làm tròn trên miền con của phần tử theo [28-34] và Hình 3.3, miền tứ giác của phần tử được chia thành  $n_c$  miền con, lúc ấy trường biến dạng tổng quát dựa vào kỹ thuật làm tròn được trình bày như sau

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^L &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}_m^L(x) d\Omega & \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_m^{NL} &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}(x) d\Omega \\
\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{b1} &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{b1}(x) d\Omega & \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{b2} &= \frac{1}{A_c} \int_{\Omega_c} \boldsymbol{\varepsilon}_{b2}(x) d\Omega
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Lưu ý ký hiệu ~ thể hiện ghi chú “được làm trơn” vì vậy  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_m^L$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_m^{NL}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{b1}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_{b2}$  lần lượt là các biến dạng trơn và  $A_C$  là diện tích của miền con đang xem xét. Thành phần biến dạng màng tuyến tính được thể hiện lại

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_m^L = \frac{1}{A_C} \int_{\Omega_C} \boldsymbol{\epsilon}_m^L(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} \sum_{i=1}^4 n(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x}) q_i d\Gamma = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L \mathbf{q}_i \quad (3.23)$$

với

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} \begin{bmatrix} N_i n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i n_y & N_i n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (3.24)$$

trong đó  $n_x$  và  $n_y$  lần lượt là hai thành phần của véc-tơ pháp tuyến ngoài ứng với biên  $\Gamma_C$ . Áp dụng tích phân Gauss dọc theo 4 cạnh biên của miền con  $\Omega_C$ ,  $\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L(\mathbf{x}_C)$  được trình bày lại như dưới đây

$$\tilde{\mathbf{B}}_{mi}^L(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \sum_{m=1}^4 \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bn}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bn}) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bn}) n_y & \sum_{n=1}^{nG} w_n N_i(\mathbf{x}_{bn}) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} l_m^C \quad (3.25)$$

với  $nG$  là số điểm tích phân Gauss,  $\mathbf{x}_{bn}$  là điểm Gauss và  $w_n$  là trọng số tương ứng. Liên quan đến hàm dạng song tuyến tính nên chọn  $nG = 1$ . Tương tự cho thành phần biến dạng màng phi tuyến

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}_m^{NL} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{mi}^{NL} \mathbf{q}_i \quad (3.26)$$

với

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{mi}^{NL} &= \tilde{\Psi} \tilde{\mathbf{G}}_i \\ \tilde{\mathbf{G}}_i &= \frac{1}{A_C} \sum_{g=1}^4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} l_g^C, \\ \tilde{\Psi} &= \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{A_C} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x l_j^C w_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_C} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y l_j^C w_i \\ \frac{1}{A_C} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_y l_j^C w_i & \frac{1}{A_C} \sum_{j=1}^4 N_i(\mathbf{x}_j^G) n_x l_j^C w_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.27)$$

trong đó  $x^G$  lần lượt là điểm Gauss,  $l^C$  chiều dài cạnh miền con và  $w_i$  là chuyển vị theo phương  $z$  tại nút  $i$  của phần tử.

Thiết lập công thức phần tử hữu hạn tron tương tự cho hai thành phần biến dạng uốn

$$\tilde{\mathbf{e}}_{b1} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{bli} \mathbf{q}_i \quad \tilde{\mathbf{e}}_{b2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{b2i} \mathbf{q}_i \quad (3.28)$$

với

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bli} = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(x_b^G) n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(x_b^G) n_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(x_b^G) n_x & N_i(x_b^G) n_y & 0 & 0 \end{pmatrix} l_b^C \quad (3.29)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{b2i} = \frac{1}{A_C} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(x_b^G) n_x & N_i(x_b^G) n_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(x_b^G) n_y & 0 & 0 & N_i(x_b^G) n_y \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(x_b^G) n_x & N_i(x_b^G) n_y & N_i(x_b^G) n_y & N_i(x_b^G) n_x \end{pmatrix} l_b^C$$

Đối với phần tử SQ4H, số lượng miền con sử dụng liên quan thành phần màng và uốn là 2 ( $n_c=2$ ) và số lượng miền con sử dụng cho thành phần cắt là 1 ( $n_c=1$ ) với mục đích vượt qua hiện tượng khóa cắt, đồng thời các thành phần biến dạng cắt được tính toán lại như sau

$$\tilde{\mathbf{e}}_{s1} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{s1i} \mathbf{q}_i \quad \tilde{\mathbf{e}}_{s2} = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{s2i} \mathbf{q}_i \quad (3.30)$$

với

$$\tilde{\mathbf{B}}_{s1i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} N_i(x) n_x d\Gamma & 0 & N_i(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} N_i(x) n_y d\Gamma & -N_i(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

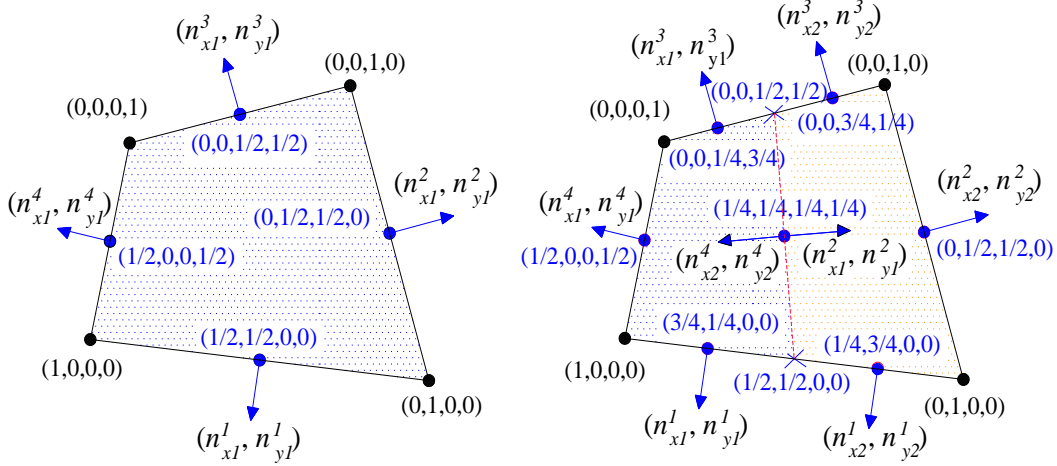
$$\tilde{\mathbf{B}}_{s2i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(x) & N_i(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -N_i(x) & 0 & 0 & N_i(x) \end{pmatrix}$$

trong đó  $N_i$  là trị số của hàm dạng tại nút  $i$  của phần tử. Việc tính toán thành phần cắt vẫn tiếp tục sử dụng tích phân Gauss để tính toán  $-N_i$  của  $\tilde{\mathbf{B}}_{s1i}$  và  $\tilde{\mathbf{B}}_{s2i}$  bởi vì tích phân trên miền con  $\Omega_C$  không thể chuyển thành tích phân đường trên biên  $\Gamma_C$ .

Áp dụng cách tiếp cận TL (*Total Lagrangian*) [5, 22, 86, 87] cho quá trình phân tích phi tuyến hình học. Phương trình phi tuyến được mô tả

$${}^t \tilde{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{q} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{P} - {}^t \mathbf{F} \quad (3.32)$$

trong đó  ${}^t\mathbf{F}$  là lực nội ứng với thời điểm  $t$  của phần tử,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{P}$  là lực ngoại ứng với thời điểm  $t+\Delta t$  của phần tử,  ${}^t\tilde{\mathbf{K}}_T$  là ma trận độ cứng tiếp tuyến được làm tròn của phần tử ứng với thời điểm  $t$  và  $\Delta\mathbf{q}$  là gia số chuyển vị của phần tử.



**Hình 3.3:**  $n_c=1$  & 2 và giá trị các hàm dạng tương ứng

Ma trận độ cứng tiếp tuyến  $\tilde{\mathbf{K}}_T$  được tính toán theo công thức

$$\tilde{\mathbf{K}}_T = \tilde{\mathbf{K}}_L + \tilde{\mathbf{K}}_{NL} + \tilde{\mathbf{K}}_g \quad (3.33)$$

trong đó  $\tilde{\mathbf{K}}_L$  là ma trận độ cứng tuyến tính,  $\tilde{\mathbf{K}}_{NL}$  là ma trận độ cứng phi tuyến và  $\tilde{\mathbf{K}}_g$  là ma trận độ cứng hình học.

$$\tilde{\mathbf{K}}_L = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_{Li}^T \mathbf{D}^* \tilde{\mathbf{B}}_{Li} A_{ci}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{NL} = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_{NLi}^T \mathbf{D}^* \tilde{\mathbf{B}}_{NLi} A_{ci}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_g = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{G}}_i^T \hat{\mathbf{N}} \tilde{\mathbf{G}}_i A_{ci}$$

$$(3.34)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_L = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_m^L \\ \tilde{\mathbf{B}}_{b1} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{b2} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{s1} \\ \tilde{\mathbf{B}}_{s2} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{NL} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_m^{NL} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

Lưu ý chỉ riêng tính toán liên quan đến thành phần cắt thì sử dụng  $n_c=1$  còn lại lấy  $n_c=2$ .

Lực nội tại thời điểm  $t$  được suy ra từ trạng thái ứng suất trong kết cấu và được viết

$${}^t\tilde{\mathbf{F}} = \int_{\Omega} (\tilde{\mathbf{B}}_L + \tilde{\mathbf{B}}_{NL})^t \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (3.35)$$

trong đó kết quả ứng suất sau vòng lặp thứ  $i$  là

$${}^t\sigma_{i+1}^* = {}^t\sigma_i^* + {}^t\Delta\sigma^* \quad (3.36)$$

Kết nối các công thức (3.32÷3.36) với (2.41÷2.43), chuyển sang tọa độ tổng thể cho toàn bộ miền kết cấu rồi áp dụng thuật toán lặp Newton-Raphson để giải phương trình phi tuyến cụ thể với các bước như sau

- Nhập dữ liệu hình học, vật liệu.
- Thông tin ban đầu:  $\mathbf{P}^0 = 0, \mathbf{F}_{(0)}^0 = 0, \mathbf{u}_{(0)}^0 = 0, \mathfrak{T} = 0.001$  (dung sai hội tụ).
- LẶP qua gia số tải,  $rep = 1..max$ 
  - Tính toán  $\lambda = 1 / max$
  - Gia tải  $\Delta\mathbf{P} = \lambda\mathbf{P}$
  - Sai số  $er = 1, i = 0$
  - $\mathbf{P}^{rep} = \mathbf{P}^{rep-1} + \Delta\mathbf{P}, \mathbf{u}_{(0)}^{rep} = \mathbf{u}^{rep-1}, \tilde{\mathbf{K}}_{T(0)}^{rep} = \tilde{\mathbf{K}}_T^{rep-1}$
  - Khi ( $i < max$ ) & ( $er > \mathfrak{T}$ )
    - $i = i + 1$
    - Giải  $\mathbf{K}_{T(i-1)}^{rep}\Delta\mathbf{u}_{(i)} = \mathbf{P}^{rep} - \mathbf{F}_{i-1}^{rep}$
    - Cập nhật  $\mathbf{u}_{(i)}^{rep} = \mathbf{u}_{(i-1)}^{rep} + \Delta\mathbf{u}_{(i)}$
    - Xác định sai số  $er = \|\Delta\mathbf{u}_{(i)}\| / \|\mathbf{u}_{(i)}^{rep}\|$
  - Kết thúc
  - Cập nhật tọa độ nút
- Kết thúc LẶP

Đặc biệt lưu ý trường hợp phân tích kết cấu tám gấp, một bậc tự do thứ 8 là bậc tự do xoay trong mặt phẳng phần tử  $\beta_z$  được thêm vào. Ở chương này tiến hành gán giá trị cho  $\mathbf{K}(i,i) = 1$ , trong đó chỉ số  $i$  tương ứng với bậc tự do xoay  $\beta_z$ .

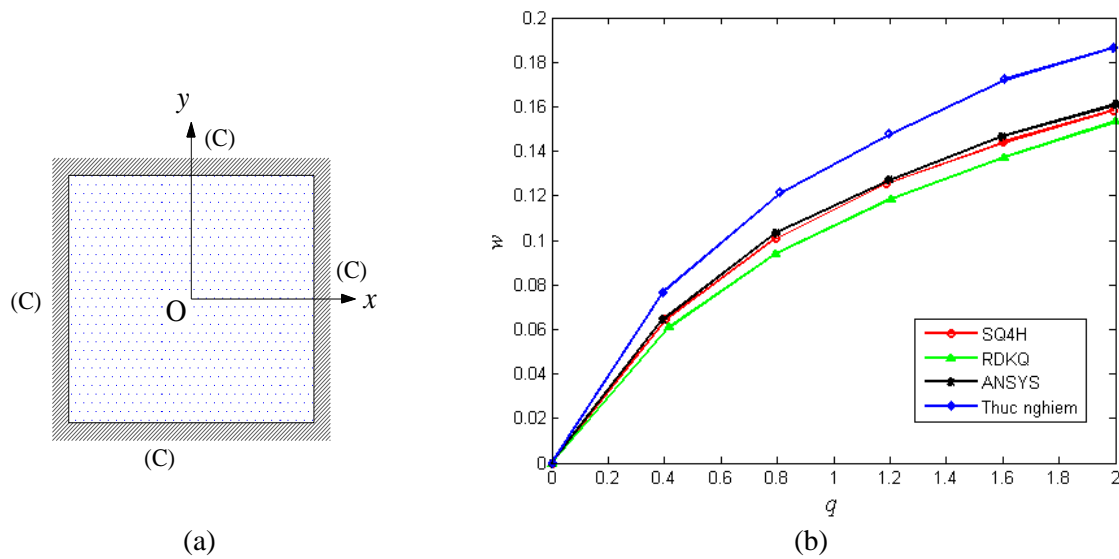
### 3.4 Kết quả số

#### 3.4.1 Phân tích uốn phi tuyến của tấm phẳng

##### 3.4.1.1 Tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ chịu tải phân bố đều

Tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  có kích thước  $a = 12$ , dày  $h = 0.096$  chịu tải trọng phân bố đều  $q = 2$ , liên kết ngàm các cạnh như Hình 3.4a. Đặc trưng vật liệu  $E_1 = 1.8282 \times 10^6$ ,

$E_2 = 1.8315 \times 10^6$ ,  $\mu_{12} = 0.23949$ ,  $G_{12} = G_{23} = G_{13} = 3.125 \times 10^5$ . Độ võng ở giữa tấm tính bởi phần tử SQ4H trên cơ sở lưới chia  $8 \times 8$  (567 dofs) được so sánh với các kết quả tham khảo khác dựa vào phần tử tứ giác 4 nút RDKQ của tác giả Zhang và cộng sự [88], trích xuất dữ liệu phần mềm Ansys từ tài liệu của nhóm tác giả Phung-Van và cộng sự ở [89] hay kết quả thực nghiệm trích xuất từ tài liệu của tác giả Putcha và cộng sự [90]. Hình 3.4b thể hiện rõ sự so sánh này và có thể thấy kết quả đạt được bởi SQ4H tiệm cận với kết quả của Ansys và tốt hơn kết quả của RDKQ khi đối chứng với kết quả thực nghiệm.

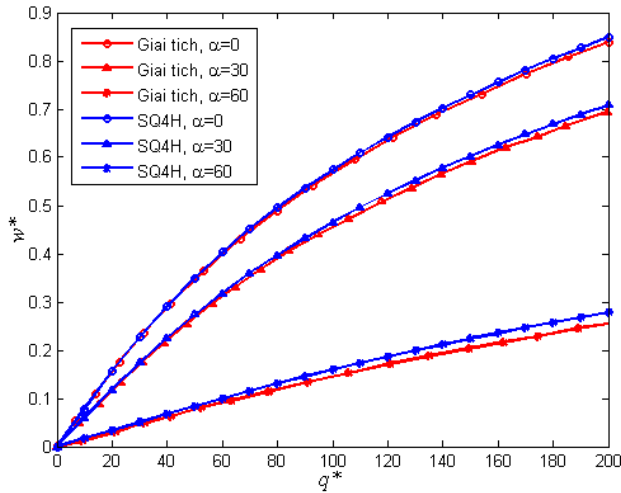


**Hình 3.4:** Tấm vuông ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều

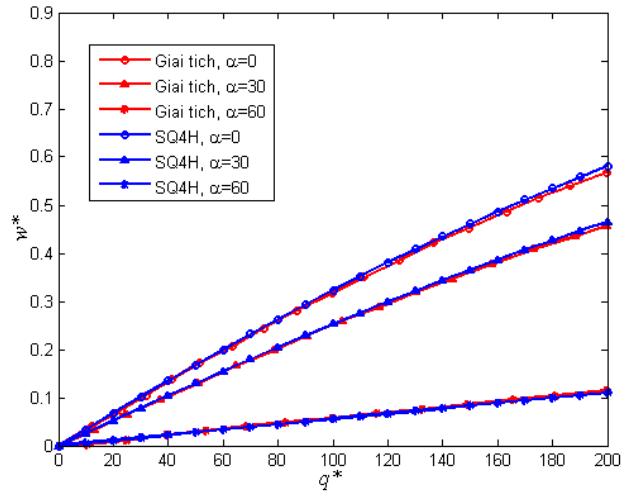
### 3.4.1.2 Tấm hình bình hành 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ chịu tải phân bố đều

Tấm hình bình hành  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  có kích thước 2 cạnh là  $a$ ,  $b$  và chiều dày  $h$ . Tấm ngàm các cạnh và chịu tải phân bố đều  $q$  với thông số tải trọng chuẩn hóa  $q^* = qa^4 / E_2 h^4$ . Góc  $\alpha$  thay đổi từ  $0^\circ$  đến  $60^\circ$ . Đặc trưng vật liệu  $E_1 / E_2 = 10$ ,  $G_{12} / E_2 = 0.33$ ,  $G_{23} / E_2 = 0.2$ ,  $G_{13} / G_{12} = 1$ ,  $\mu_{12} = 0.22$ . Độ võng không thứ nguyên ở giữa tấm  $w^* = w(a/2, b/2, 0) / h$  tính bởi phần tử SQ4H trên cơ sở lưới chia  $8 \times 8$  (567 dofs) được so sánh với kết quả giải tích của nhóm tác giả Upadhyay và cộng sự ở [91] và được mô tả ở Hình 3.5a-f. Nhóm tác giả này đã tiến hành ánh xạ miền tính toán bình hành thành miền vuông rồi sử dụng chuỗi đa thức Chebyshev kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc 3 (TSDT) để suy nghiệm giải tích của bài toán phi tuyến. Mặc dù sai số không đáng kể giữa kết quả số dựa trên phần tử

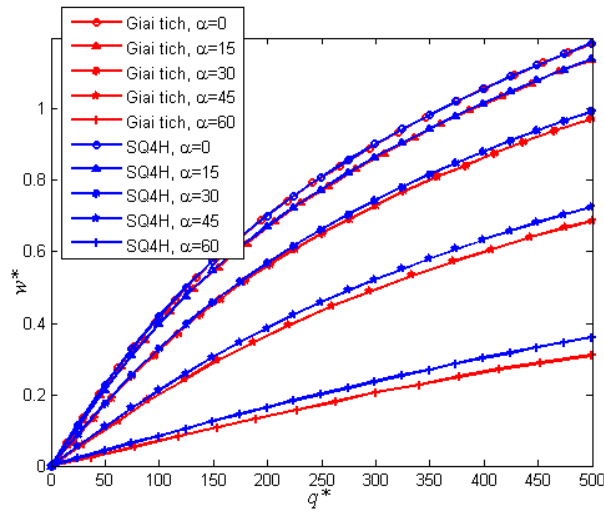
SQ4H và kết quả giải tích có thể thấy ở Hình 3.5a-f, tuy nhiên khi góc  $\alpha$  tăng lên thì sai số tăng lên giữa hai kết quả. Điều này có thể giải thích do hình dạng của các phần tử trong lưới trở thành hình thoi dẹp và dài, khác biệt rất nhiều so với hình dạng vuông của các phần tử ánh xạ trong tọa độ tự nhiên nên gây ra lỗi trong tích phân số của ma trận độ cứng dựa trên các điểm cầu phương Gauss.



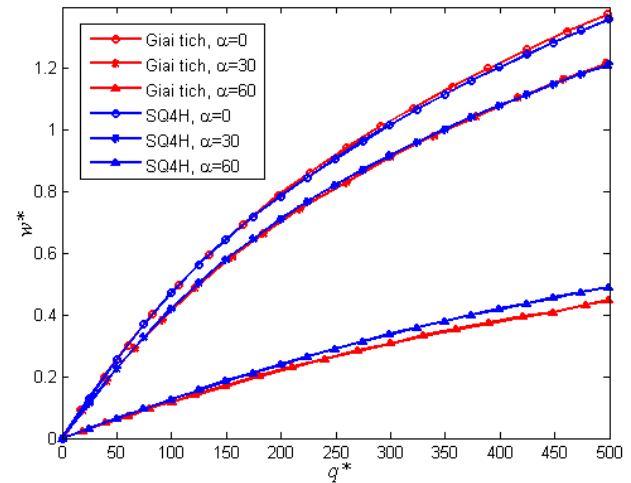
(a)  $a/b = 1$  và  $a/h = 10$



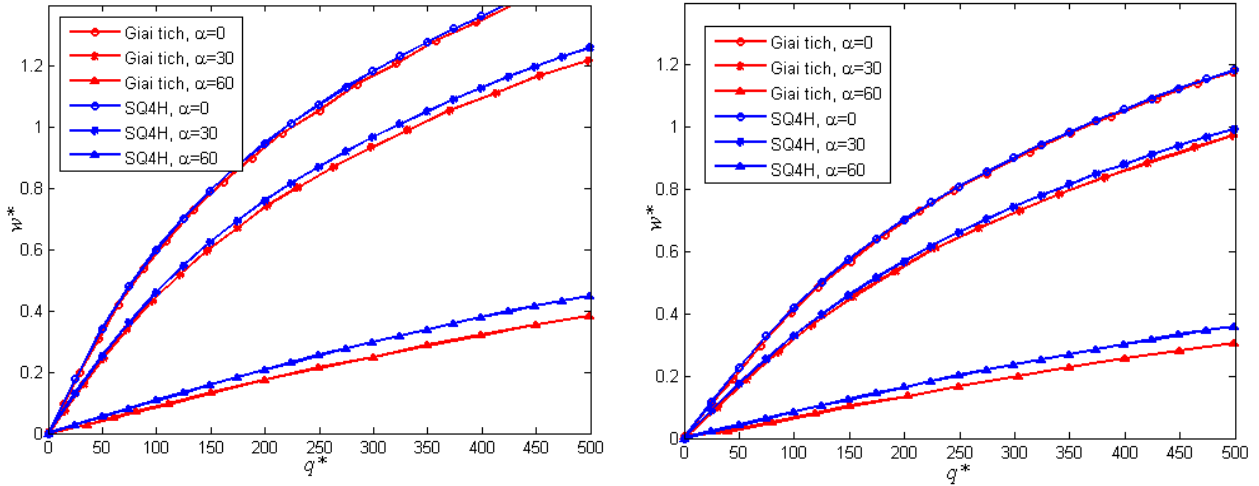
(b)  $a/b = 1$  và  $a/h = 100$



(c)  $a/b = 1$  và  $a/h = 20$



(d)  $a/b = 2$  và  $a/h = 20$



(e)  $a/h = 20$  và  $E_1/E_2 = 1$

(f)  $a/h = 20$  và  $E_1/E_2 = 2$

**Hình 3.5:** Tấm hình bình hành ngâm nhiều lớp chịu tải phân bố đều

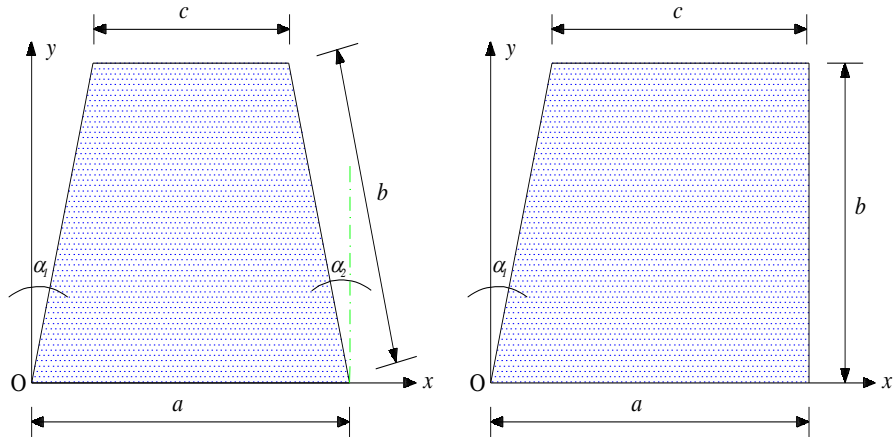
### 3.4.1.3 Tấm hình thang 5 lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ , $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$ chịu tải phân bố đều

Xét tấm hình thang cân (loại I) hoặc không cân (loại II) với 5 lớp  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  hoặc  $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ]$  như Hình 3.6a và Hình 3.6b. Tấm ngâm các cạnh và chịu tải phân bố đều  $q$  với thông số tải trọng chuẩn hóa  $q^* = qa^4 / E_2 h^4$ . Đặc trưng vật liệu  $E_1 / E_2 = 25$ ,  $G_{12} / E_2 = 0.5$ ,  $G_{13} / G_{12} = 1$ ,  $G_{23} / E_2 = 0.2$ ,  $\mu_{12} = 0.25$ .

Độ võng không thứ nguyên  $w^* = \text{minimum}(w) / h$  được tính dựa vào phần tử SQ4H trên cơ sở lưới chia  $8 \times 8$  (567 dofs) tiếp tục được đem so sánh với kết quả của tác giả Watts và cộng sự dựa vào phương pháp không lưới EFG (*Element Free Galerkin*) ở tài liệu [92] thông qua mô tả ở Hình 3.7a và Hình 3.7b. Nhóm tác giả này sử dụng phương pháp không lưới EFG kết hợp hàm dạng MK (*Moving Kriging*) với giá trị tham số tương quan là 3 và lưới  $5 \times 5$  miền ảnh hưởng dạng chữ nhật.

Kết quả xấp xỉ tốt giữa phương pháp phần tử hữu hạn dựa trên SQ4H và phương pháp không lưới EFG cho thấy tính hiệu quả của phần tử đề xuất trong phân tích phi tuyến tấm nhiều lớp hình thang cho cả hai loại hình dáng tấm khác nhau I, II và cả hai cách phân bố hướng sợi khác nhau

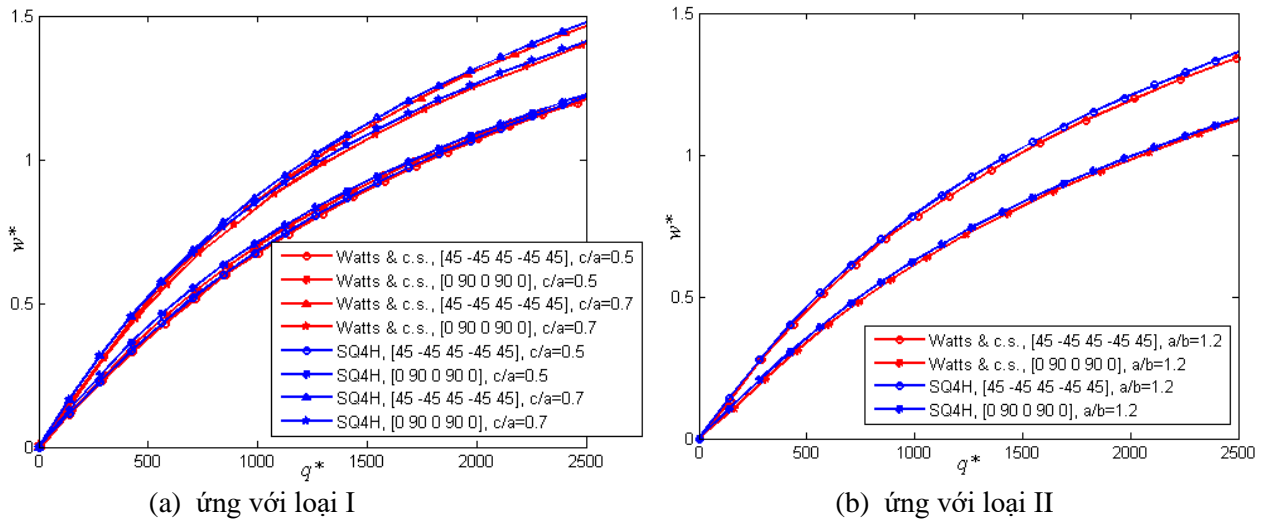




(a) Loại I:  $\alpha_1 = \alpha_2$ ,  $a/b = 1$ ,  $c/a = 0.5/0.7$

(b) Loại II:  $\alpha_2 = 0$ ,  $c/b = 1$ ,  $a/b = 1.2$

**Hình 3.6:** Tầm hình thang ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều



(a) ứng với loại I

(b) ứng với loại II

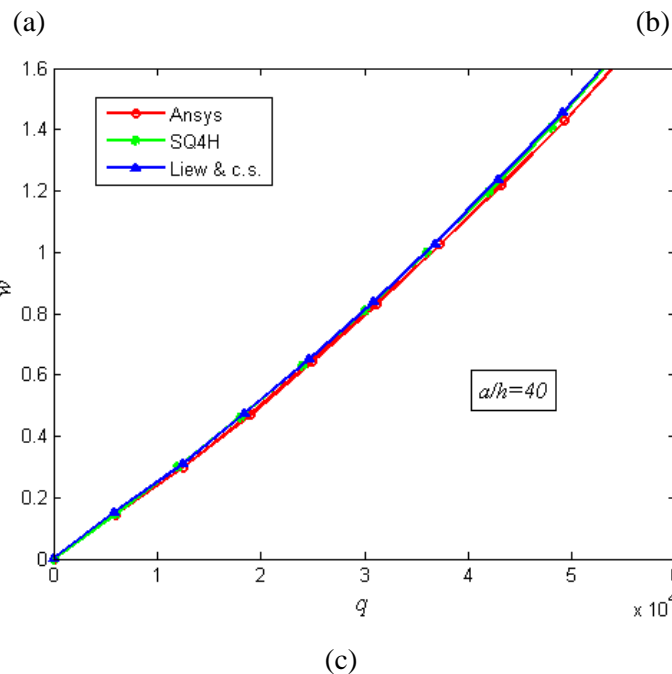
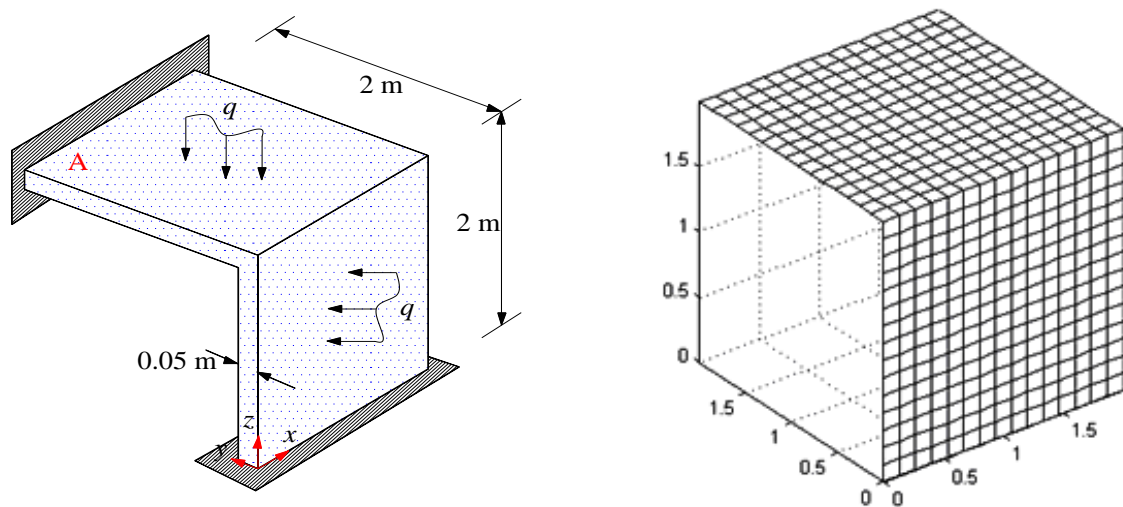
**Hình 3.7:** So sánh độ võng của tầm hình thang ngàm nhiều lớp chịu tải phân bố đều

### 3.4.2 Phân tích uốn phi tuyến của tấm gập

#### 3.4.2.1 Tấm gập 90° đẳng hướng chịu tải phân bố đều

Tấm gập 90° liên kết ngàm với các thông số hình học như Hình 3.8a. Tấm chịu tải phân bố đều  $q$  thẳng góc với bề mặt tấm. Đặc trưng vật liệu  $E = 3 \times 10^9$  và  $\mu = 0.3$ . Đường cong tải trọng và độ võng giữa tấm A với 450 phần tử SQ4H được vẽ so sánh với kết quả của phần mềm Ansys dựa trên 5000 phần tử *Shell181* và kết quả của nhóm tác giả Liew và cộng sự dựa trên phương pháp dải hữu hạn [93] như Hình 3.8b và Hình 3.8c. *Shell181* là một phần tử bốn nút với sáu bậc tự do tại mỗi nút: ba chuyển vị thẳng theo ba hướng  $x, y, z$  và ba chuyển vị xoay quanh ba trục này. Theo tài liệu Ansys [94], phần tử

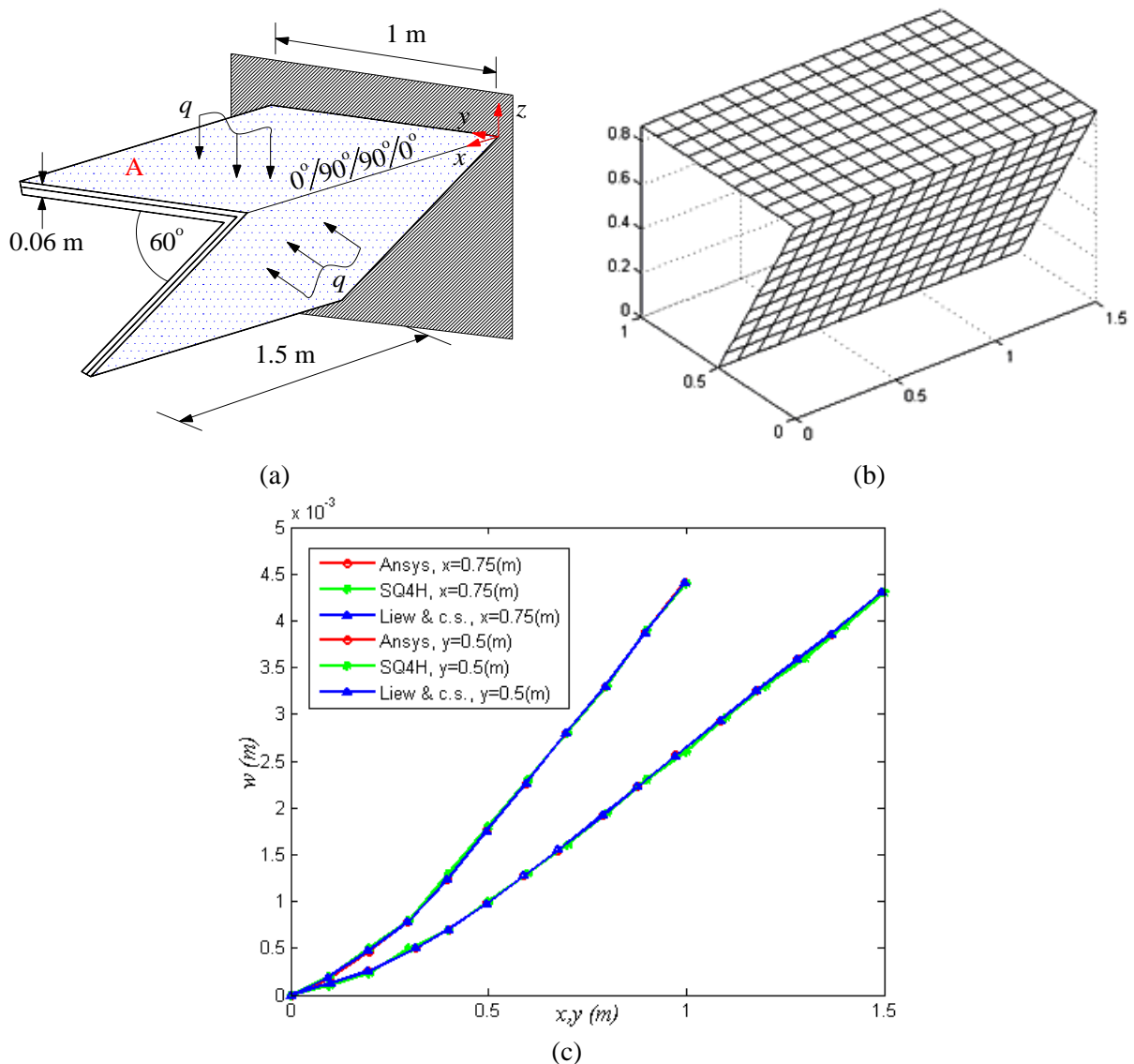
*Shell181* thích hợp để phân tích cấu trúc vỏ từ mỏng đến dày vừa phải và rất phù hợp cho các ứng dụng phi tuyến. Bên cạnh đó, với phương pháp dải hữu hạn, kết quả thu được phụ thuộc nhiều vào kích thước dải cũng như bậc của đa thức nội suy cơ bản. Để đạt được kết quả hội tụ, tác giả Liew và cộng sự phải sử dụng 11 dải với đa thức nội suy bậc 5, theo [93]. Tuy nhiên ở đây với số lượng phần tử sử dụng ít hơn nhiều so với Ansys nhưng có thể thấy kết quả dựa trên phần tử SQ4H xấp xỉ tốt với kết quả của Ansys và kết quả của nhóm tác giả Liew và cộng sự.



**Hình 3.8:** Tấm gấp 90° liên kết ngầm chịu tải phân bố đều thẳng góc với bề mặt tấm

### 3.4.2.2 Tấm gấp 60° với 4 lớp [0°/90°/90°/0°] chịu tải phân bố đều

Tấm gập  $60^\circ$  với 4 lớp  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  liên kết ngàm và các thông số hình học như Hình 3.9a. Tấm chịu tải phân bố đều và thẳng góc với bề mặt tấm. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 25$ ,  $G_{12}/E_2 = 0.5$ ,  $G_{13}/G_{12} = 1$ ,  $G_{23}/E_2 = 0.2$ ,  $\mu_{12} = 0.25$ . Đường chuyển vị dọc theo tọa độ  $x = 0.75$  m và  $y = 0.5$  m của tấm A được xác định với lưới chia 300 phần tử SQ4H, tổng cộng 336 nút. Chúng được vẽ so sánh với kết quả của phần mềm Ansys mô phỏng bởi các phần tử *Shell181*, tổng cộng 5581 nút, đồng thời so sánh với kết quả của tác giả Liew và cộng sự dựa vào phương pháp không lưới Galerkin trên cơ sở kích thước miền giá đỡ  $d_{max} = 4$  và lưới chia  $13 \times 13$  nút theo tài liệu [95] như Hình 3.9b và Hình 3.9c.



**Hình 3.9:** Tấm gập  $60^\circ$  liên kết ngàm chịu tải phân bố đều thẳng góc với bề mặt tấm

---

Từ Hình 3.9c có thể thấy đường cong kết quả thu được bởi phần tử SQ4H hoàn toàn xấp xỉ với hai đường cong tham khảo dựa vào phần mềm Ansys và dựa vào phương pháp không lưới Galerkin. Mặc dù tổng số lượng nút trong lưới chia không nhiều nhưng việc đạt được kết quả xấp xỉ với Ansys là điều đáng ghi nhận cho phần tử SQ4H.

### 3.5 Kết luận

Phần tử SQ4H đã được thiết lập như trên và được sử dụng để phân tích uốn phi tuyến cho tấm phẳng và tấm gấp. Kết quả đạt được khi phân tích phi tuyến hình học cho kết cấu tấm phẳng và tấm gấp nhiều lớp dựa vào phần tử SQ4H là chấp nhận được vì sai số không đáng kể so với những kết quả tham khảo khác được trích xuất từ các tài liệu đáng tin cậy. Trên cơ sở áp dụng kỹ thuật trơn biến dạng trên miền con kết hợp dạng  $C^0$  của lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT, phần tử SQ4H cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính. Cuối cùng, phần tử SQ4H có thể được mở rộng để phân tích kết cấu vỏ hay các dạng bài toán cơ học khác. Việc đánh giá sai số cụ thể hơn khi áp dụng phần tử SQ4H được tiến hành ở chương cuối của luận án này.

---

## Chương 4

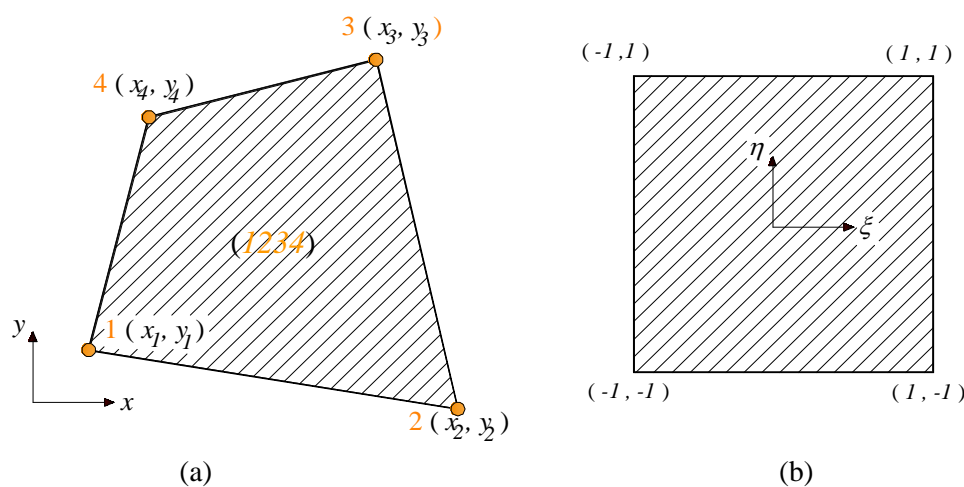
# PHẦN TỬ SQ4T

### 4.1 Giới thiệu

Trong chương này lần lượt trình bày kỹ thuật nội suy kép, xây dựng phần tử tứ giác SQ4T (*Sort...Q4...Twice interpolation strategy*) dựa trên kỹ thuật nội suy kép, kết quả tính toán số minh họa, so sánh và đánh giá. Cuối cùng là những kết luận cho phần tử này.

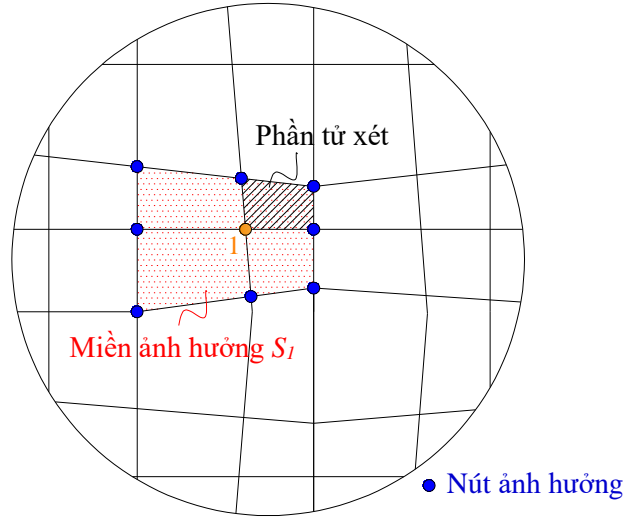
### 4.2 Kỹ thuật nội suy kép

Kỹ thuật nội suy kép (TIS) lần đầu tiên được đưa ra bởi tác giả Zheng [53] dùng cho phần tử tam giác 3 nút. Sau đó kỹ thuật này tiếp tục được phát triển bởi Bui và cộng sự [51] hay Wu và cộng sự [52],... Đi sâu vào chi tiết, kỹ thuật này tiến hành xây dựng hàm dạng bậc cao kể đến ảnh hưởng của nhóm nút lân cận đến giá trị biến của điểm cần xét, có thể thích nghi với lưới phần tử “méo”, kết quả hội tụ với độ chính xác khá cao và trường ứng suất thu được liên tục qua biên phần tử khi xem xét cho bài toán ứng suất phẳng. Quá trình thiết lập hàm dạng thông qua hai giai đoạn nội suy: (1) giai đoạn đầu nội suy tương tự phần tử tứ giác 4 nút truyền thống thông qua hàm dạng chuẩn song tuyến tính, (2) giai đoạn sau tiến hành xét ảnh hưởng của nhóm nút lân cận đến giá trị biến của điểm cần xét, quá trình nội suy trong giai đoạn này kể đến cả giá trị nút lẫn gradient trung bình nút.



**Hình 4.1:** Phần tử tứ giác 4 nút

Hàm dạng bậc cao sau khi xây dựng vẫn thỏa đặc tính delta *Kronecker* và có thể tái tạo chính xác bất kỳ chức năng nào trong các chức năng cơ bản của FEM truyền thống. Từ các nút 1, 2, 3 & 4 như Hình 4.1 tiến hành xác định nhóm nút lân cận phần tử tứ giác đang xét (1234) với miền bao  $\bar{\Omega}$  là sự kết hợp các miền con  $S_1, S_2, S_3$  và  $S_4$  như Hình 4.2.



**Hình 4.2:** Miền ảnh hưởng nút 1.

Gọi  $n_{sp}$  là số lượng nút có trong miền bao  $\bar{\Omega}$  với lưu ý tập hợp nút này có thể thay đổi số lượng tùy thuộc vào vị trí của điểm cần xét trên lưới chia cho trước. Thông qua 2 giai đoạn nội suy, trường chuyển vị được thể hiện như sau

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{sp}} \tilde{N}_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i = \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{x}) \mathbf{q} \quad (4.1)$$

với

$$\begin{aligned} \tilde{N}_i = & \underbrace{\varepsilon_1 N_i^{[1]} + \varepsilon_{1x} \bar{N}_{i,x}^{[1]} + \varepsilon_{1y} \bar{N}_{i,y}^{[1]}}_{\text{node 1}} + \underbrace{\varepsilon_2 N_i^{[2]} + \varepsilon_{2x} \bar{N}_{i,x}^{[2]} + \varepsilon_{2y} \bar{N}_{i,y}^{[2]}}_{\text{node 2}} \\ & + \underbrace{\varepsilon_3 N_i^{[3]} + \varepsilon_{3x} \bar{N}_{i,x}^{[3]} + \varepsilon_{3y} \bar{N}_{i,y}^{[3]}}_{\text{node 3}} + \underbrace{\varepsilon_4 N_i^{[4]} + \varepsilon_{4x} \bar{N}_{i,x}^{[4]} + \varepsilon_{4y} \bar{N}_{i,y}^{[4]}}_{\text{node 4}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\mathbf{q}_i^T = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]$$

$\tilde{N}_i$  theo [51] được gọi là hàm dạng theo kỹ thuật nội suy kép trong đó

$$\bar{N}_{i,x}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,x}^{[1][e]}), \quad \bar{N}_{i,y}^{[1]} = \sum_{e \in S_1} (\omega_e N_{i,y}^{[1][e]}), \quad \omega_e = \frac{\Delta_e}{\sum_{\tilde{e} \in S_1} \Delta_{\tilde{e}}} \quad \text{với } e \in S_1 \quad (4.3)$$

$\Delta_e$  là diện tích phần tử ( $e$ ) thuộc miền ảnh hưởng  $S_1$  của nút 1 và  $\sum_{\tilde{e} \in S_1} \Delta_{\tilde{e}}$  là tổng diện tích của  $S_1$ ,  $N_i^{[1]}$  là véc-tơ hàm dạng mở rộng tại nút 1,  $N_{i,x}^{[1][e]}$  và  $N_{i,y}^{[1][e]}$  là đạo hàm hàm

dạng theo  $x, y$  tính toán trong miền  $S_I$ . Hoàn toàn tương tự khi biểu diễn công thức cho  $\bar{N}_{i,x}^{(2I)}, \bar{N}_{i,y}^{(2I)}, \bar{N}_{i,x}^{(3I)}, \bar{N}_{i,y}^{(3I)}, \bar{N}_{i,x}^{(4I)}$  và  $\bar{N}_{i,y}^{(4I)}$ . Mặt khác, các hàm thử  $\mathcal{E}$  theo [51-53] được trình bày lại

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= N_1 + N_1^2 N_2 + N_1^2 N_3 + N_1^2 N_4 - N_1 N_2^2 - N_1 N_3^2 - N_1 N_4^2 \\ \mathcal{E}_{1x} &= -(x_1 - x_2)(N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4) \\ &\quad - (x_1 - x_3)(N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4) \\ &\quad - (x_1 - x_4)(N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3) \\ \mathcal{E}_{1y} &= -(y_1 - y_2)(N_1^2 N_2 + 0.5 N_1 N_2 N_3 + 0.5 N_1 N_2 N_4) \\ &\quad - (y_1 - y_3)(N_1^2 N_3 + 0.5 N_1 N_3 N_2 + 0.5 N_1 N_3 N_4) \\ &\quad - (y_1 - y_4)(N_1^2 N_4 + 0.5 N_1 N_4 N_2 + 0.5 N_1 N_4 N_3)\end{aligned}\tag{4.4}$$

trong đó

$$N_i = (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta) / 4, \quad i = 1, 2, 3, 4 \tag{4.5}$$

là các hàm dạng cơ bản trong hệ tọa độ tự nhiên gắn với phần tử tứ giác 4 nút truyền thống. Hoàn toàn tương tự cho các hàm  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{2x}, \mathcal{E}_{2y}, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_{3x}, \mathcal{E}_{3y}, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_{4x}$  và  $\mathcal{E}_{4y}$ . Các hàm thử này thỏa mãn:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_i) &= \delta_{1i} & \mathcal{E}_{1,x}(\mathbf{x}_i) &= 0 & \mathcal{E}_{1,y}(\mathbf{x}_i) &= 0 \\ \mathcal{E}_{1,x}(\mathbf{x}_i) &= 0 & \mathcal{E}_{1,x,x}(\mathbf{x}_i) &= \delta_{1i} & \mathcal{E}_{1,x,y}(\mathbf{x}_i) &= 0 \\ \mathcal{E}_{1,y}(\mathbf{x}_i) &= 0 & \mathcal{E}_{1,y,x}(\mathbf{x}_i) &= 0 & \mathcal{E}_{1,y,y}(\mathbf{x}_i) &= \delta_{1i}\end{aligned}\tag{4.6}$$

$$\delta_{1i} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 1 \\ 0 & \text{if } i \neq 1 \end{cases}$$

và tính chất này lặp lại cho  $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_{2x}, \mathcal{E}_{2y}, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_{3x}, \mathcal{E}_{3y}, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_{4x}, \mathcal{E}_{4y}$  cũng như các đạo hàm của chúng theo  $x$  và  $y$ .

*Chứng minh*  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_i) = \delta_{1i}, \mathcal{E}_{1,x}(\mathbf{x}_i) = 0$  và  $\mathcal{E}_{1,y}(\mathbf{x}_i) = 0$

Rõ ràng khi  $i=1$  thì  $\xi = -1$  và  $\eta = -1$  nên  $N_1 = 1, N_2 = N_3 = N_4 = 0$  và  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_1) = 1$ .

Khi  $i=2, 3$  &  $4$  tương tự có  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_2) = 0, \mathcal{E}_1(\mathbf{x}_3) = 0$  và  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_4) = 0$ . Vậy  $\mathcal{E}_1(\mathbf{x}_i) = \delta_{1i}$

Bên cạnh đó, từ công thức (4.5) viết lại

$$\mathbf{N}_i = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \tag{4.7}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{array} \right\} \mathbf{N}_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} = \mathbf{der}_i$$

Ma trận Jacobi và nghịch đảo được xác định

$$\mathbf{J} = \mathbf{der}_i \times \begin{Bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 \\ \kappa_3 & \kappa_4 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_1 = -y_1(1-\xi) - y_2(1+\xi) + y_3(1+\xi) + y_4(1-\xi) \quad (4.8)$$

$$\kappa_2 = y_1(1-\eta) - y_2(1-\eta) - y_3(1+\eta) + y_4(1+\eta)$$

$$\kappa_3 = x_1(1-\xi) + x_2(1+\xi) - x_3(1+\xi) - x_4(1-\xi)$$

$$\kappa_4 = -x_1(1-\eta) + x_2(1-\eta) + x_3(1+\eta) - x_4(1+\eta)$$

Để dàng xác định các đạo hàm riêng  $\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{1x}}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{1y}}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{2x}}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{2y}}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_3}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{3x}}{\partial N_i}$ ,

$\frac{\partial \mathcal{E}_{3y}}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_4}{\partial N_i}$ ,  $\frac{\partial \mathcal{E}_{4x}}{\partial N_i}$  và  $\frac{\partial \mathcal{E}_{4y}}{\partial N_i}$ . Khi  $i=1$  thì  $\xi = -1$  và  $\eta = -1$  nên  $N_1 = 1, N_2 = N_3 = N_4 = 0$  và

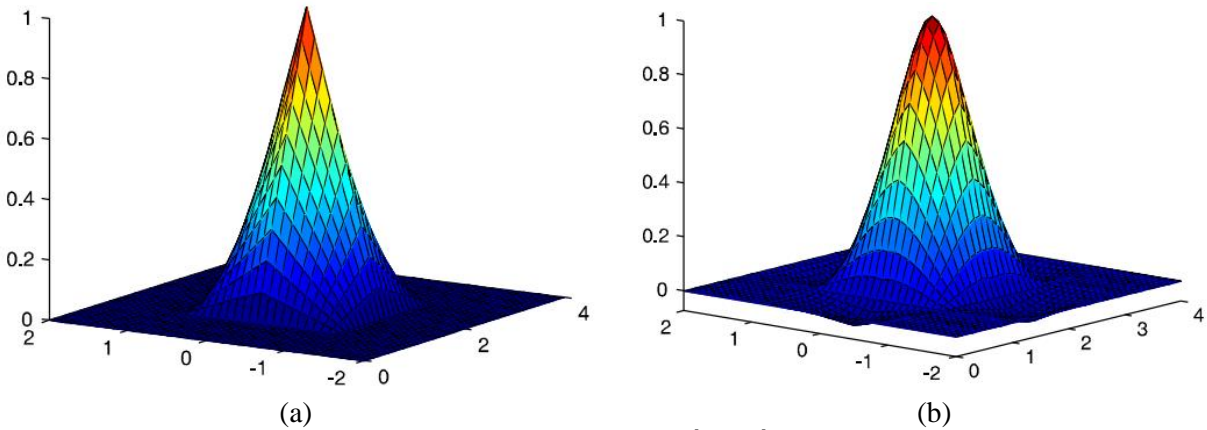
$\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial N_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$ . Ngoài ra từ việc rút gọn các công thức ở (4.8) suy ra

$$\mathcal{E}_{1,x}(\mathbf{x}_1) = \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial N_i} \right] \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial x} \right\} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \frac{1}{4|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} y_2 - y_4 \\ y_4 - y_1 \\ 0 \\ y_1 - y_2 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\mathcal{E}_{1,y}(\mathbf{x}_1) = \left[ \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial N_i} \right] \left\{ \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1] \frac{1}{4|\mathbf{J}|} \begin{Bmatrix} x_4 - x_2 \\ x_1 - x_4 \\ 0 \\ x_2 - x_1 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.9)$$

Hoàn toàn tương tự đối với  $i = 2, 3$  &  $4$  suy ra  $\mathcal{E}_{1,x}(\mathbf{x}_i) = 0$  và  $\mathcal{E}_{1,y}(\mathbf{x}_i) = 0$ . Các tính chất khác trong công thức (4.6) dễ dàng chứng minh. Từ đó hàm dạng bậc cao thiết lập như công thức (4.2) cũng thỏa đặc tính delta *Kronecker* và có thể tái tạo chính xác bất kỳ chức năng nào trong các chức năng cơ bản của phần tử hữu hạn truyền thống. Sự khác biệt hàm dạng bậc cao của phần tử tứ giác 4 nút dựa trên kỹ thuật nội suy kép so với hàm dạng của phần tử tứ giác 4 nút truyền thống được mô tả ở Hình 4.3.





**Hình 4.3:** Hàm dạng tứ giác 4 nút: a) truyền thống, b) nội suy kép, [51]

### 4.3 Xây dựng phần tử SQ4T

Phần tử tứ giác SQ4T bao gồm 4 nút và mỗi nút có 5 bậc tự do được xây dựng dựa vào kỹ thuật nội suy kép để nghiên cứu ứng xử kết cấu tấm/vỏ composite nhiều lớp/FGM.

#### 4.3.1 Phương trình chủ đạo

Trường chuyển vị dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT

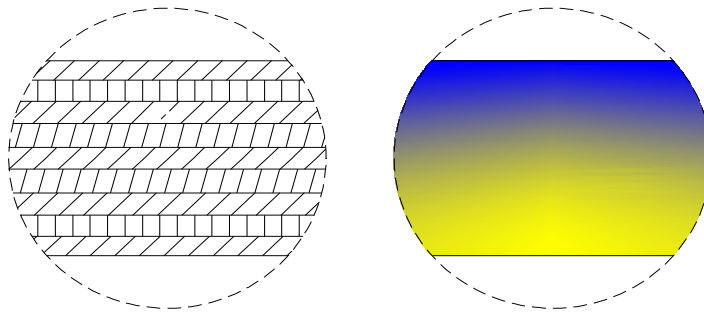
$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\beta_x + u_0(x, y) \\ v(x, y, z) &= z\beta_y + v_0(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Véc-tơ biến dạng trong mặt phẳng

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (4.11)$$

và véc-tơ biến dạng cắt ngang

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad (4.12)$$



**Hình 4.4:** Minh họa vật liệu composite nhiều lớp và vật liệu FGM

Đối với vật liệu composite nhiều lớp như Hình 4.4, các véc-tơ lực màng, véc-tơ momen uốn, và véc-tơ lực cắt ngang được xác định như sau

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N}_o \\ \mathbf{M}_o \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_s$$

trong đó  $\mathbf{N}_o = [N_x \quad N_y \quad N_{xy}]^T$ ,  $\mathbf{M}_o = [M_x \quad M_y \quad M_{xy}]^T$ ,  $\mathbf{S}_o = [Q_x \quad Q_y]^T$  và các ma trận  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  &  $\mathbf{C}$  được tính toán từ

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz, & \mathbf{B}_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} z \bar{Q}_{ij} dz, & \mathbf{D}_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} z^2 \bar{Q}_{ij} dz, & i, j &= 1, 2, 6 \\ \mathbf{C}_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} k_s \bar{Q}_{ij} dz, & i, j &= 4, 5 \end{aligned} \quad (4.14)$$

$\bar{Q}_{ij}$  là các hằng số đàn hồi được đưa ra bởi tác giả Reddy [65].

Đối với vật liệu FGM như Hình 4.4, ma trận  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$  &  $\mathbf{C}$  được viết lại

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}, \mathbf{D}_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \frac{E(z)}{1-\mu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \mu(z) & 0 \\ \mu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu(z))/2 \end{bmatrix} dz \\ \mathbf{C}_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{k_s E(z)}{2(1+\mu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dz \end{aligned} \quad (4.15)$$

Hệ số hiệu chỉnh cắt  $k_s = 5/6$  được thêm vào khi tính toán các thành phần của ma trận  $\mathbf{C}$  như [5].

### 4.3.2 Triển khai công thức phần tử hữu hạn

Dựa trên kỹ thuật nội suy kép, thành phần biến dạng màng của phần tử được xác định thông qua miền ảnh hưởng  $\bar{\Omega}$  với số lượng nút ảnh hưởng  $n_{sp}$  như công thức sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (4.16)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) &= \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{N}_{n_{sp},y} & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5n_{sp}} \\ \mathbf{q}_e &= \left[ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \right]_{(i=1..n_{sp})}^T \end{aligned} \quad (4.17)$$

Thành phần biến dạng uốn của phần tử được xác định tương tự trên miền  $\bar{\Omega}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (4.18)$$

với

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & \dots & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & \tilde{N}_{n_{sp},x} \end{bmatrix}_{3 \times 5n_{sp}} \quad (4.19)$$

Biến dạng cắt ngang từ đó cũng được thiết lập

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (4.20)$$

với

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & \tilde{N}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & \tilde{N}_{n_{sp}} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & \tilde{N}_1 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & \tilde{N}_{n_{sp}} \end{bmatrix}_{2 \times 5n_{sp}} \quad (4.21)$$

Ma trận độ cứng của phần tử

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{B} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s d\Omega \quad (4.22)$$

Lưu ý các ma trận  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$  và  $\mathbf{K}_g$  được thiết lập theo phần tử tứ giác truyền thống khi cần phân tích uốn tĩnh, dao động tự do hay ổn định như các công thức (2.52), (2.54) và (2.56).

Trường hợp phân tích uốn phi tuyến, thành phần biến dạng màng phi tuyến của phần tử được xây dựng dựa vào kỹ thuật nội suy kép

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{NL}(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m^{NL}(\mathbf{x}_C)\mathbf{q}_e \quad (4.23)$$

trong đó

$$\mathbf{B}_m^{NL} = \boldsymbol{\Psi} \mathbf{G} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{N}_{1,x} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \tilde{N}_{n_{sp},y} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 5n_{sp}},$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{i,x} w_i & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{i,y} w_i \\ \tilde{N}_{i,y} w_i & \tilde{N}_{i,x} w_i \end{bmatrix}_{(i=1..n_{sp})} \quad (4.25)$$

Thiết lập ma trận độ cứng tiếp tuyến của phần tử SQ4T

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NL} + \mathbf{K}_{gNL} \quad (4.26)$$

với

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_L^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_L d\Omega \\ \mathbf{K}_{NL} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}_{NL}^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_{NL} d\Omega \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{K}_{gNL} = \int_{\Omega} \mathbf{G}^T \hat{\mathbf{N}} \mathbf{G} d\Omega$$

$$\mathbf{B}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m \\ \mathbf{B}_b \\ \mathbf{B}_s \end{bmatrix}, \mathbf{B}_{NL} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m^{NL} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{bmatrix}$$

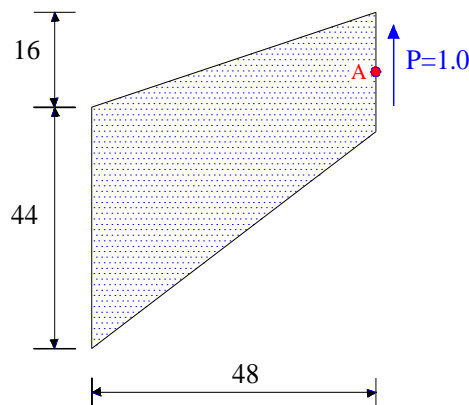
Tính toán, kết nối các ma trận trên toàn miền, sử dụng cách tiếp cận TL (*Total Lagrangian*) và giải lặp Newton-Raphson như trình bày ở chương 3, quá trình phân tích phi tuyến kết cấu tấm được thực hiện.

## 4.4 Kết quả số

### 4.4.1 Phân tích uốn tĩnh

#### 4.4.1.1 Kết cấu màng Cook

Một kết cấu màng của Cook như Hình 4.5 được phân tích trước tiên khi sử dụng phần tử SQ4T rút gọn số bậc tự do mỗi nút còn lại 2 là  $u_i$  và  $v_i$ . Các hằng số đặc trưng vật liệu là  $E = 1.0$ ,  $\mu = 1/3$  theo tác giả Ko và cộng sự ở tài liệu [23]. Trạng thái ứng suất phẳng được xem xét và giá trị chuyển vị tại điểm giữa A được tính toán kèm so sánh với kết quả tham khảo dựa vào phần tử MITC4, MITC4+ cũng như nghiệm chính xác từ tài liệu của tác giả Ko và cộng sự [23].



**Hình 4.5:** Kết cấu màng Cook

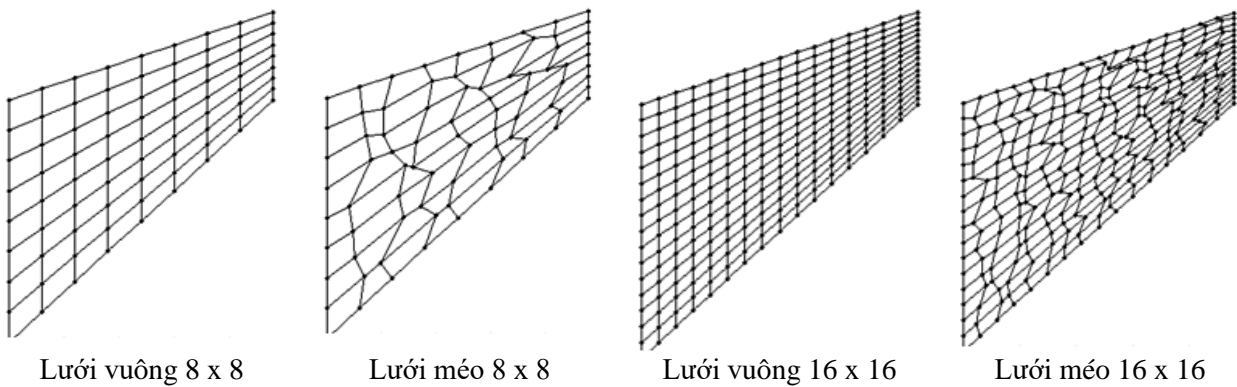
Bảng 4.1 thể hiện giá trị độ võng tại điểm A ứng với các lưới chia 2 x 2, 4 x 4, 8 x 8, 16 x 16 và 32 x 32. Để đánh giá thêm khả năng thích nghi của phần tử SQ4T, mô hình phân

tích trên cũng được chia lưới méo như Hình 4.6 để tính toán độ võng tại điểm A. Tọa độ các nút bên trong miền bài toán được hiệu chỉnh thông qua hệ số  $s$  như các công thức dưới đây

$$\begin{aligned}x' &= x + r_c s \Delta x \\y' &= y + r_c s \Delta y\end{aligned}\tag{4.46}$$

với  $r_c$  là giá trị ngẫu nhiên lấy giữa -1 và 1,  $\Delta x$  và  $\Delta y$  là kích thước phần tử theo phương  $x$ , phương  $y$  tương ứng lưới vuông ban đầu. Hệ số  $s \in [0, 0.4]$  được sử dụng để kiểm soát độ méo của lưới. Ở luận án này, hệ số  $s = 0.4$  được chọn khi đề cập đến lưới méo cho mọi bài toán liên quan.

Trong cả hai trường hợp lưới vuông và méo, kết quả độ võng tại điểm A thu được bởi phần tử SQ4T khả quan hơn các kết quả của MITC4 và MITC4+ theo [23] như Hình 4.7.

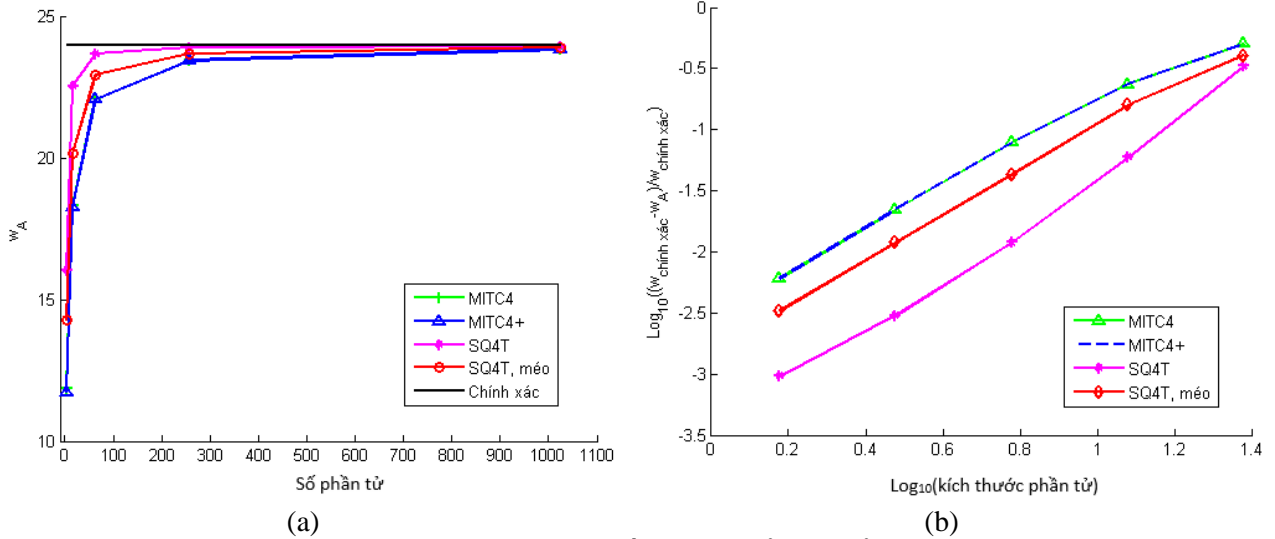


**Hình 4.6:** Chia lưới kết cấu màng Cook

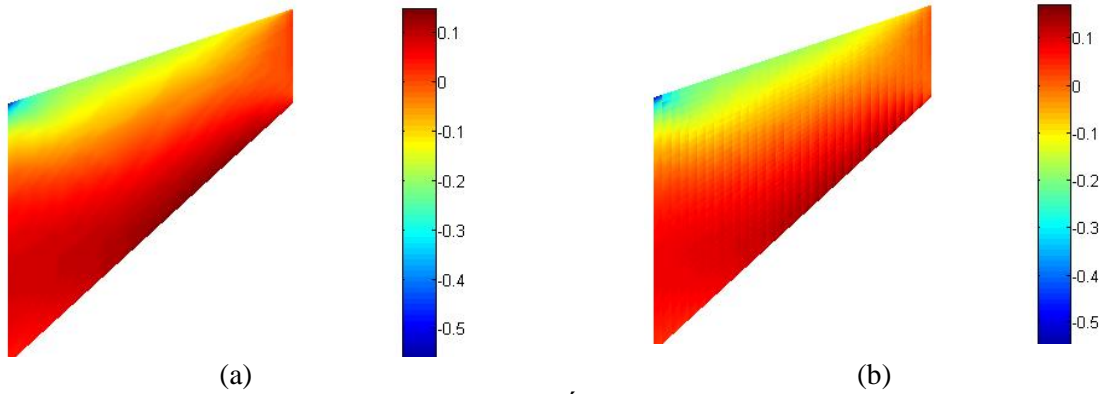
**Bảng 4.1:** Độ võng tại điểm A

Phần tử	$2 \times 2$	$4 \times 4$	$8 \times 8$	$16 \times 16$	$32 \times 32$	Chính xác [23]
MITC4 [23]	11.8452	18.2992	22.0792	23.4304	23.8176	
MITC4+ [23]	11.7291	18.2662	22.0751	23.4301	23.8176	23.9642
SQ4T (lưới vuông)	16.0461	22.5329	23.6783	23.8918	23.9410	
SQ4T (lưới méo)	14.2610	20.1386	22.9264	23.6770	23.8848	

Trường ứng suất của kết cấu màng Cook cũng được mô tả trong Hình 4.8 ứng với hai phần tử SQ4T và MITC4. Có thể thấy trường ứng suất thu được từ SQ4T liên tục qua biên phần tử.



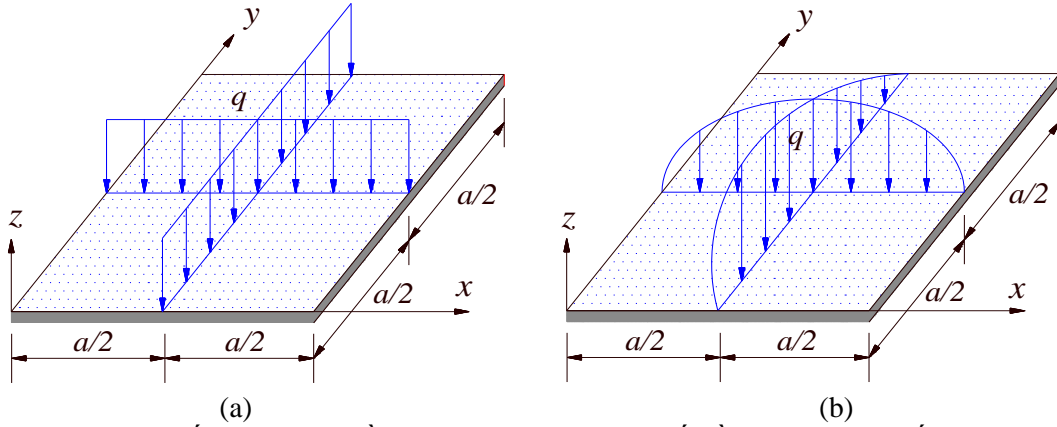
**Hình 4.7:** So sánh sai số của chuyển vị điểm A



**Hình 4.8:** Trường ứng suất (a) SQ4T, (b) MITC4

#### 4.4.1.2 Tấm vuông 2 lớp $[\theta^o/-\theta^o]$ chịu tải phân bố đều

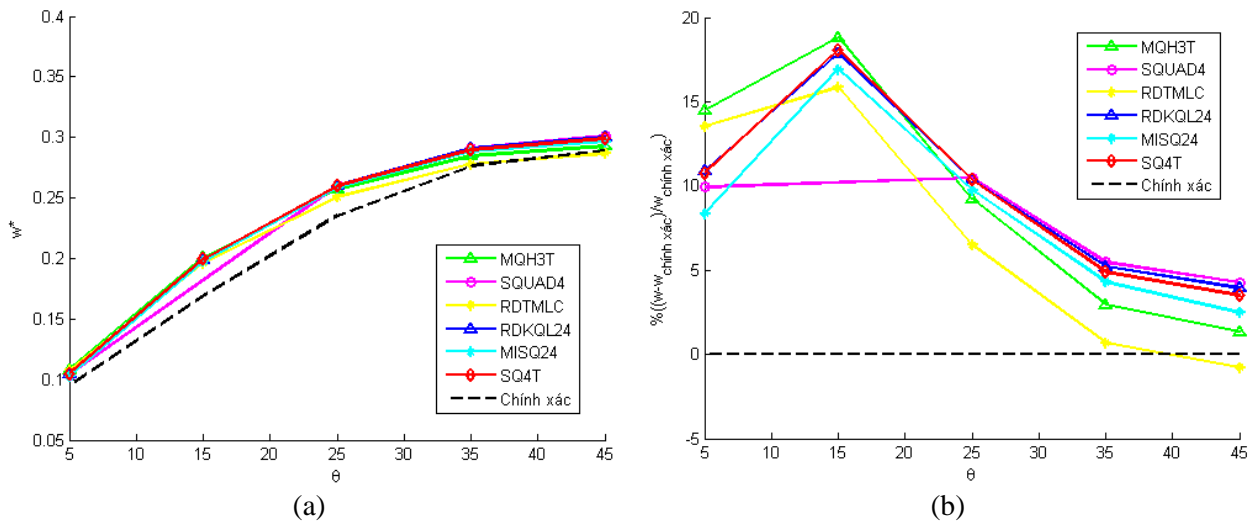
Tấm vuông  $[\theta^o/-\theta^o]$  có kích thước  $a = 10$ , dày  $h = 0.02$  chịu tải trọng phân bố đều  $q = 1$ , liên kết ngàm các cạnh như Hình 4.9a. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Độ võng chuẩn hóa ở giữa tấm  $w^* = 100E_2wh^3 / (qa^4)$  tính bởi SQ4T được so sánh với các kết quả tham khảo khác dựa vào phần tử lai MQH3T theo [96], phần tử đa lớp hỗn hợp SQUAD4 [97], phần tử tam giác đa lớp tinh chỉnh RDTMLC [98], phần tử tứ giác tinh chỉnh RDKQ-L24 [99], phần tử tứ giác 4 nút tron MISQ24 [5] và nghiệm chính xác đưa ra bởi tác giả Whitney theo các tài liệu [100, 101] và được thể hiện ở Bảng 4.2 kèm Hình 4.10.



**Hình 4.9:** Tấm vuông nhiều lớp chịu a) tải phân bố đều và b) phân bố hình sin

**Bảng 4.2:** Độ võng chuẩn hóa giữa tấm vuông đa lớp liên kết ngàm chịu tải phân bố đều

$\theta$	MQH3T [96]	SQUAD4 [97]	RDTMLC [98]	RDKQ-L24 [99]	MISQ24 [5]	SQ4T	Chính xác [100, 101]
5°	0.1083	0.1040	0.1074	0.1049	0.1025	0.1048	0.0946
15°	0.2009	-	0.1959	0.1993	0.1977	0.1997	0.1691
25°	0.2572	0.2602	0.2508	0.2599	0.2584	0.2599	0.2355
35°	0.2844	0.2914	0.2782	0.2907	0.2882	0.2898	0.2763
45°	0.2929	0.3013	0.2868	0.3004	0.2962	0.2991	0.2890



**Hình 4.10:** (a) So sánh độ võng chuẩn hóa, (b) So sánh sai số độ võng chuẩn hóa tấm vuông  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$  liên kết ngàm

Theo Bảng 4.2, tổng số bậc tự do (*dof\_degree of freedom*) trên toàn miền rời rạc khi sử dụng MQH3T là 665 và lần lượt tiếp theo như sau SQUAD4 (605 dofs), RDTMLC (605 dofs), RDKQ-L24 (726 dofs), MISQ24 (726 dofs) và SQ4T (605 dofs). Dựa vào Hình 4.10 có thể thấy kết quả thu được bởi phần tử SQ4T chênh lệch không nhiều so với kết quả của những phần tử khác cũng như với nghiệm chính xác đưa ra bởi tác giả Whitney [100, 101].

#### 4.4.1.3 Tấm vuông 2 lớp $[-45^\circ/45^\circ]$ chịu tải phân bố hình sin

Tấm vuông  $[-45^\circ/45^\circ]$  có kích thước  $a = 10$ , dày  $h = 0.02$  chịu tải trọng phân bố hình sin với  $q = 1$ , liên kết tựa đơn các cạnh như Hình 4.9b. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Các kết quả chuẩn hóa độ võng  $w^* = 100E_2wh^3/(q_0a^4)$ , ứng suất pháp  $\sigma_x^* = \sigma_x h^2/(q_0a^2)$  tại điểm  $(a/2, a/2, h/2)$ ; ứng suất tiếp  $\tau_{xy}^* = \tau_{xy} h^2/(q_0a^2)$  tại điểm  $(0, 0, -h/2)$ ; ứng suất tiếp  $\tau_{xz}^* = \tau_{xz} h^2/(q_0a^2)$  tại điểm  $(0, a/2, h/4)$  tính bởi SQ4T được so sánh với các kết quả tham khảo khác dựa vào các phần tử CTMQ20 ( lưới 8 x 8), RDKQ-L24 (lưới 10 x 10) [99], MFE (lưới 8 x 8) [102], MISQ24 (lưới 10 x 10) [5] và nghiệm chính xác theo lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT ở các tài liệu [5, 65, 99, 103] và được trình bày như Bảng 4.3a và Bảng 4.3b.

**Bảng 4.3a:** Kết quả chuẩn hóa của tấm vuông 2 lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ( $a/h = 100$ )

$a/h$	Phần tử	$w^*$	$\sigma_x^*$	$\tau_{xy}^*$	$\tau_{xz}^*$
100	CTMQ20 [5]	0.6519	0.2474	0.2295	0.1194
		(-0.685%)	(-0.960%)	(-1.755%)	(-44.283%)
	RDKQ-L24 [99]	0.6546	0.2500	0.2316	0.1597
		(-0.274%)	(0.080%)	(-0.856%)	(-25.478%)
	MFE [102]	0.6558	-	-	-
		(-0.091%)			
MISQ24 [5]	0.6535	0.2452	0.2298	0.1884	
	(-0.441%)	(-1.841%)	(-1.627%)	(-12.086%)	
SQ4T	0.6567	0.2428	0.2342	0.1931	
	(0.046%)	(-2.802%)	(0.257%)	(-9.892%)	
	Chính xác FSDT	0.6564	0.2498	0.2336	0.2143

**Bảng 4.3b:** Kết quả chuẩn hóa của tấm vuông 2 lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin ( $a/h = 20$ )

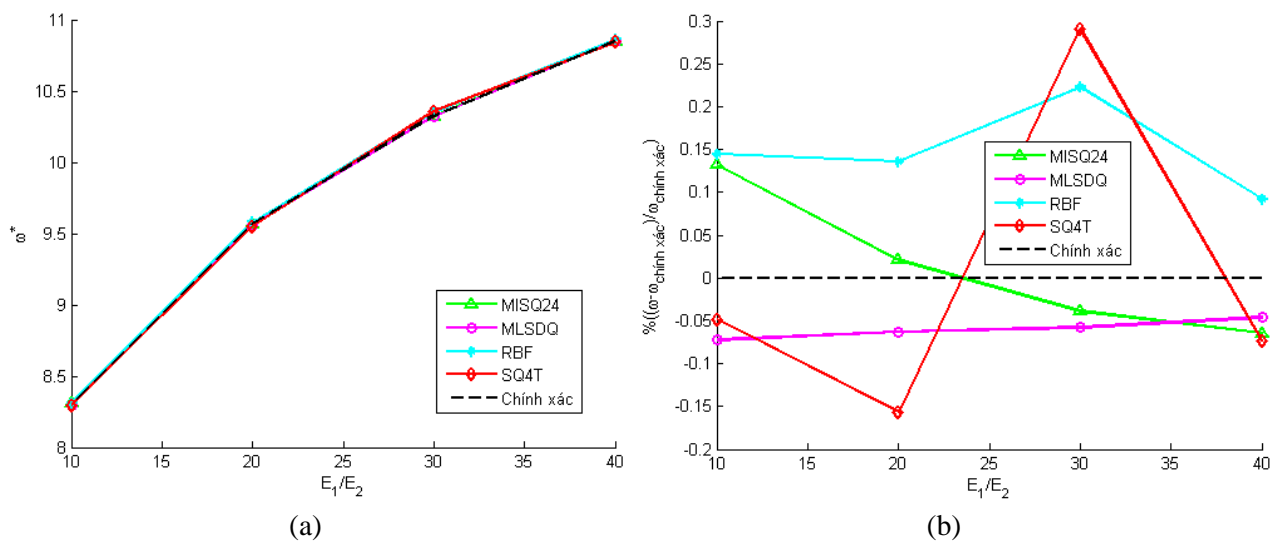
$a/h$	Phần tử	$w^*$	$\sigma_x^*$	$\tau_{xy}^*$	$\tau_{xz}^*$
20	CTMQ20 [5]	0.6906	0.2523	0.2333	0.1773
		(-1.074%)	(1.001%)	(-0.128%)	(-17.266%)
	RDKQ-L24 [99]	0.6960	0.2516	0.2316	0.2020
		(-0.300%)	(0.721%)	(-0.856%)	(-5.739%)
	MFE [102]	-	-	-	-
	MISQ24 [5]	0.6956	0.2452	0.2298	0.1884
(-0.358%)		(-1.841%)	(-1.626%)	(-12.086%)	
SQ4T	0.7090	0.2428	0.2342	0.1931	
	(1.561%)	(-2.802%)	(0.257%)	(-9.892%)	
	Chính xác FSDT	0.6981	0.2498	0.2336	0.2143



## 4.4.2 Phân tích dao động tự do

### 4.4.2.1 Tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Trước tiên, một tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  tựa đơn có tỷ số  $a/h = 5$  được xem xét. Đặc trưng vật liệu của tấm  $E_2 = 10^6 Pa$ ,  $E_1 = 3.10^6 Pa / 10^7 Pa / 2.10^7 Pa / 3.10^7 Pa / 4.10^7 Pa$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ ,  $\rho = 1$ . Bảng 4.4 và Bảng 4.5 trình bày so sánh giữa kết quả tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa  $\omega^* = (\omega L^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$  dựa vào 256 phần tử SQ4T với các kết quả tham khảo khác như 196 phần tử MISQ24 [5], phương pháp MLSĐQ [104] hay phương pháp RBF [105] với tổng cộng 121 nút rời rạc trên toàn miền hoặc nghiệm giải tích suy ra từ các lý thuyết phân tích khác nhau ở các tài liệu [5, 105-116] khi thay đổi giá trị của tỷ số  $E_1/E_2$  hoặc  $a/h$ . Chẳng hạn nhóm tác giả Reddy và Phan đã tìm ra nghiệm giải tích dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSĐT [116], tác giả Liew dựa vào phương pháp p-Ritz [109], nhóm tác giả Ferreira và Fasshauer dựa vào phương pháp RBF-pseudospectral [110], nhóm Wu và Chen trên cơ sở lý thuyết tấm bậc cao cục bộ [111], tác giả Matsunaga dựa vào lý thuyết tấm bậc cao tổng thể [112], nhóm tác giả Striz và cộng sự áp dụng lý thuyết lớp riêng lẻ bậc cao [113], hoặc nhóm Zhen và Wanji áp dụng lý thuyết tấm bậc cao có xét tương tác cục bộ lẫn tổng thể [114]. Bên cạnh đó, kết quả chính xác được trích xuất từ các tài liệu [5, 65, 107]. Hình 4.11 thể hiện đồ thị so sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa ứng với tỷ số  $a/h = 5$ .



**Hình 4.11:** (a) So sánh tần số dao động chuẩn hóa, (b) So sánh sai số tần số dao động

chuẩn hóa tám vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  liên kết tựa đơn với  $a/h = 5$

**Bảng 4.4:** So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa với  $a/h = 5$

Phần tử	$E_1/E_2$			
	10	20	30	40
MISQ24 [5]	8.309	9.569	10.322	10.847
MLSDQ [104]	8.292	9.561	10.320	10.849
RBF [105]	8.310	9.580	10.349	10.864
SQ4T	8.294	9.552	10.356	10.846
Chính xác [5, 65, 107]	8.298	9.567	10.326	10.854

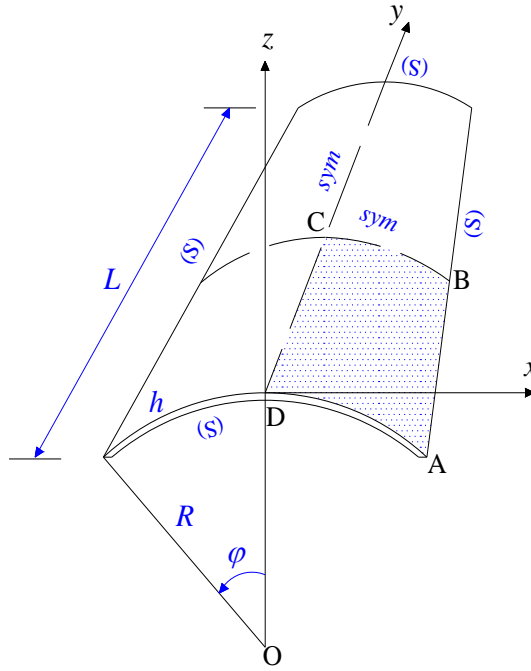
**Bảng 4.5:** So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa với  $E_1/E_2=40$

Phần tử / Lý thuyết	$a/h$					
	5	10	20	25	50	100
MISQ24 [5]	10.847	15.165	17.719	18.138	18.753	18.918
p-Ritz [109]	10.855	15.143	17.658	18.071	18.673	18.836
RBF_pseudospectral [110]	10.807	15.100	17.633	18.049	18.658	18.822
HSDT [116]	10.989	15.268	17.666	18.049	18.462	18.756
HOIL [113]	10.673	15.066	17.535	18.054	18.670	18.835
Local theory [111]	10.682	15.069	17.636	18.055	18.670	18.835
Global theory [112]	10.687	15.072	17.636	18.055	18.670	18.835
Global-Local [114]	10.729	15.165	17.803	18.240	18.902	19.156
SQ4T	10.846	15.167	17.718	18.126	18.758	18.885

Hình 4.11b thể hiện sự không ổn định trong phân tích dao động tự do của kết cấu tám đa lớp khi sử dụng phần tử SQ4T.

#### 4.4.2.2 Vỏ trụ 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Một vỏ trụ 4 lớp  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  tựa đơn với các thông số hình học như bán kính  $R = 100$ , chiều dài  $L = 20$ , chiều dày  $h = 0.2$  và góc cong  $\varphi = 0.1$  rad được ghi chú ở Hình 4.12. Vật liệu của vỏ là  $E_2 = 10^6 Pa$ ,  $E_1 = 25 \cdot 10^6 Pa$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ,  $G_{23} = 0.2E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$  và  $\rho = 1$ . Sai số không đáng kể của tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa theo  $\omega^* = (\omega L^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$  khi so kết quả dựa vào 324 phần tử SQ4T với các kết quả tham khảo khác theo lý thuyết nhiều lớp LW [117] sử dụng 64 phần tử shell LW của tác giả Liu và cộng sự, theo tác giả Jayasankar và cộng sự sử dụng 25 phần tử vỏ suy biến 9 nút [118], theo tác giả Nguyen-Van [5] sử dụng 64 phần tử tron 4 nút có kể đến bậc tự do xoay trong mặt phẳng phần tử hoặc theo nghiệm giải tích đưa ra bởi tác giả Reddy [119] được thể hiện ở Bảng 4.6.



**Hình 4.12:** Vỏ trụ liên kết tựa đơn

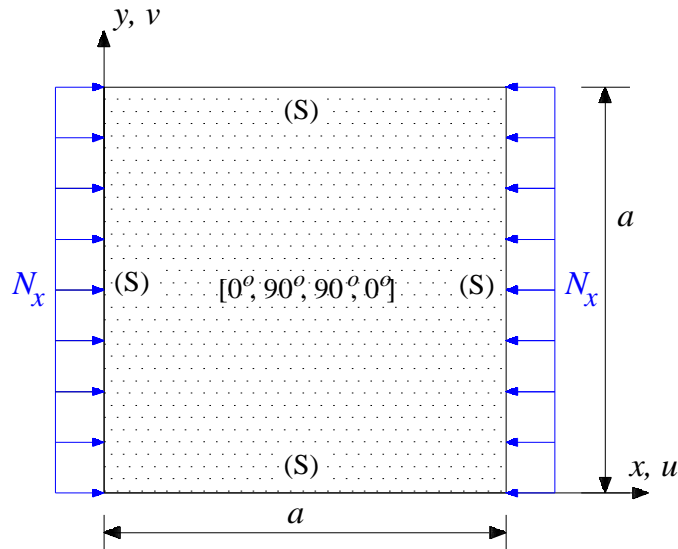
**Bảng 4.6:** So sánh tần số dao động đầu tiên được chuẩn hóa

Sắp xếp	So sánh dạng 1				
$[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$	MISQ24 [5]	Lý thuyết LW [117]	Jayasankar [118]	Reddy [119]	SQ4T
	16.794	17.390	17.700	16.668	17.204

### 4.4.3 Phân tích ổn định

#### 4.4.3.1 Tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn chịu nén đơn trục

Tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  tựa đơn được nghiên cứu ứng xử dưới tác dụng nén đơn trục trong mặt phẳng tấm như Hình 4.13. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, 40$ ;  $G_{23} = 0.5E_2$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ ,  $\rho = 1$ . Tỷ số chiều dài cạnh trên chiều dày  $a/h = 10$ . Lực tới hạn chuẩn hóa  $P^* = N_x a^2 / (E_2 h^3)$  được xác định dựa vào 100 phần tử SQ4T và so sánh với các kết quả khác của tác giả Nguyen-Van [5] dựa trên 256 phần tử tứ giác 4 nút tron MISQ24, nhóm tác giả Liu và cộng sự áp dụng FSDT kết hợp phương pháp MRBF (*Mesh-free Radial Basis Function*) với tổng cộng 441 nút rời rạc trên toàn miền [120], nhóm tác giả Reddy và cộng sự [116] hoặc nhóm tác giả Khdeir và cộng sự [107] với nghiệm giải tích dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSĐT hay kết quả nghiệm đàn hồi 3D của tác giả Noor [121] như Bảng 4.7.



**Hình 4.13:** Tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  chịu nén đơn trục

**Bảng 4.7:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi  $a/h=10$

Mô hình	$E_1/E_2$				
	3	10	20	30	40
MISQ24 [5]	5.352	9.878	15.214	19.577	23.236
Liu và cộng sự [120]	5.401	9.985	15.374	19.537	23.154
Reddy và cộng sự [116]	5.114	9.774	15.298	19.957	23.340
Khdeir và cộng sự [107]	5.442	10.026	15.418	19.813	23.489
Noor [121]	5.294	9.762	15.019	19.304	22.881
SQ4T	5.404	9.890	15.248	19.592	23.401

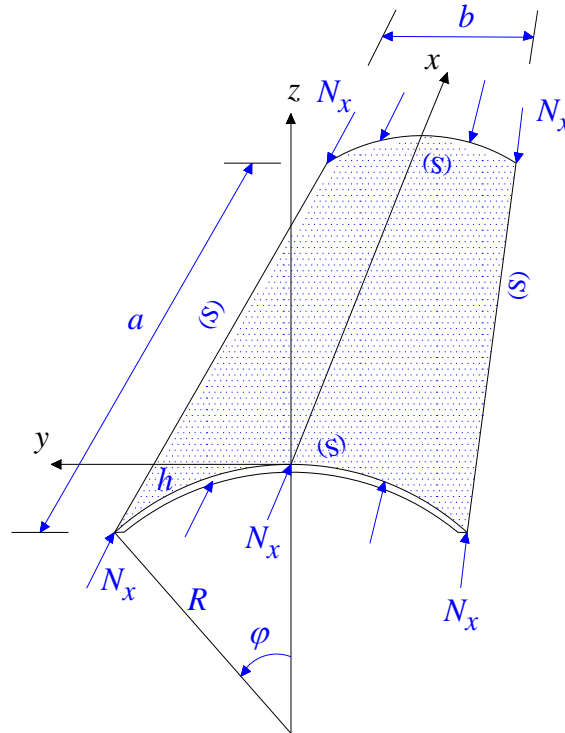
**Bảng 4.8:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa chuẩn hóa khi  $E_1/E_2=40$

Mô hình	$a/h$			
	10	20	50	100
MISQ24 [5]	23.236	31.747	35.561	36.190
FSDT(a) [122]	23.409	31.625	35.254	35.851
FSDT(b) [123]	23.471	31.707	35.356	35.955
HSDT [116]	23.349	31.637	35.419	35.971
SQ4T	23.401	31.692	35.427	35.994

Đồng thời khi thay đổi tỷ số  $a/h$  và lấy giá trị tỷ số  $E_1/E_2 = 40$ , tiếp theo là sự so sánh giữa kết quả đạt được dựa trên 100 phần tử SQ4T với kết quả dựa vào 256 phần tử MISQ24 của tác giả Nguyen-Van [5] cũng như các nghiệm giải tích trên cơ sở FSDT đưa ra bởi nhóm tác giả Chakrabarti và cộng sự theo [122] hoặc của nhóm tác giả Reddy và cộng sự theo [116, 123] trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT lần bậc cao

HSDT như ở Bảng 4.8. Sai số không đáng kể giữa kết quả của SQ4T với các kết quả khác cho thấy khả năng sử dụng phần tử này trong phân tích ổn định kết cấu

#### 4.4.3.2 Vỏ trụ 5 lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn chịu nén đơn trục



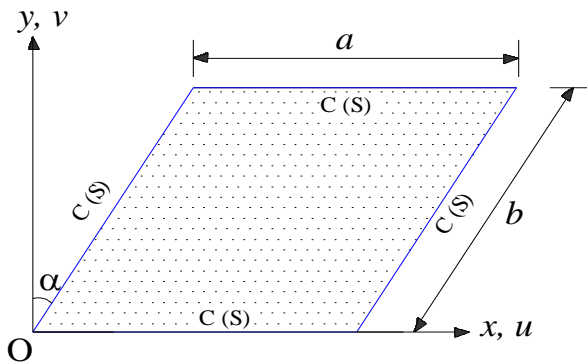
**Hình 4.14:** Vỏ trụ 5 lớp  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Vỏ trụ  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  liên kết tựa đơn như Hình 4.14 với  $a/b = 1$ ,  $R/a = 20$ . Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Giá trị lực tới hạn chuẩn hóa  $P^* = N_x a^2 / (E_2 h^3)$  trên cơ sở sử dụng 196 phần tử SQ4T được so sánh với các kết quả khác từ các tác giả Nguyen-Van, Kumar, Prusty hay Sciuva theo [5, 124-126] như Bảng 4.9. Trong đó, tác giả Nguyen-Van sử dụng 256 phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp dựa trên kỹ thuật làm trơn biến dạng trên miền con, tác giả Kumar và cộng sự sử dụng 100 phần tử vỏ cong 8 nút đẳng tham số, tác giả Prusty và cộng sự cũng sử dụng 64 phần tử vỏ cong 8 nút khác và cuối cùng tác giả Sciuva cung cấp nghiệm giải tích trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT. Sai số được tính toán dựa vào nghiệm giải tích của tác giả Sciuva và được trình bày ở Bảng 4.9.

**Bảng 4.9:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi  $a/h$ 

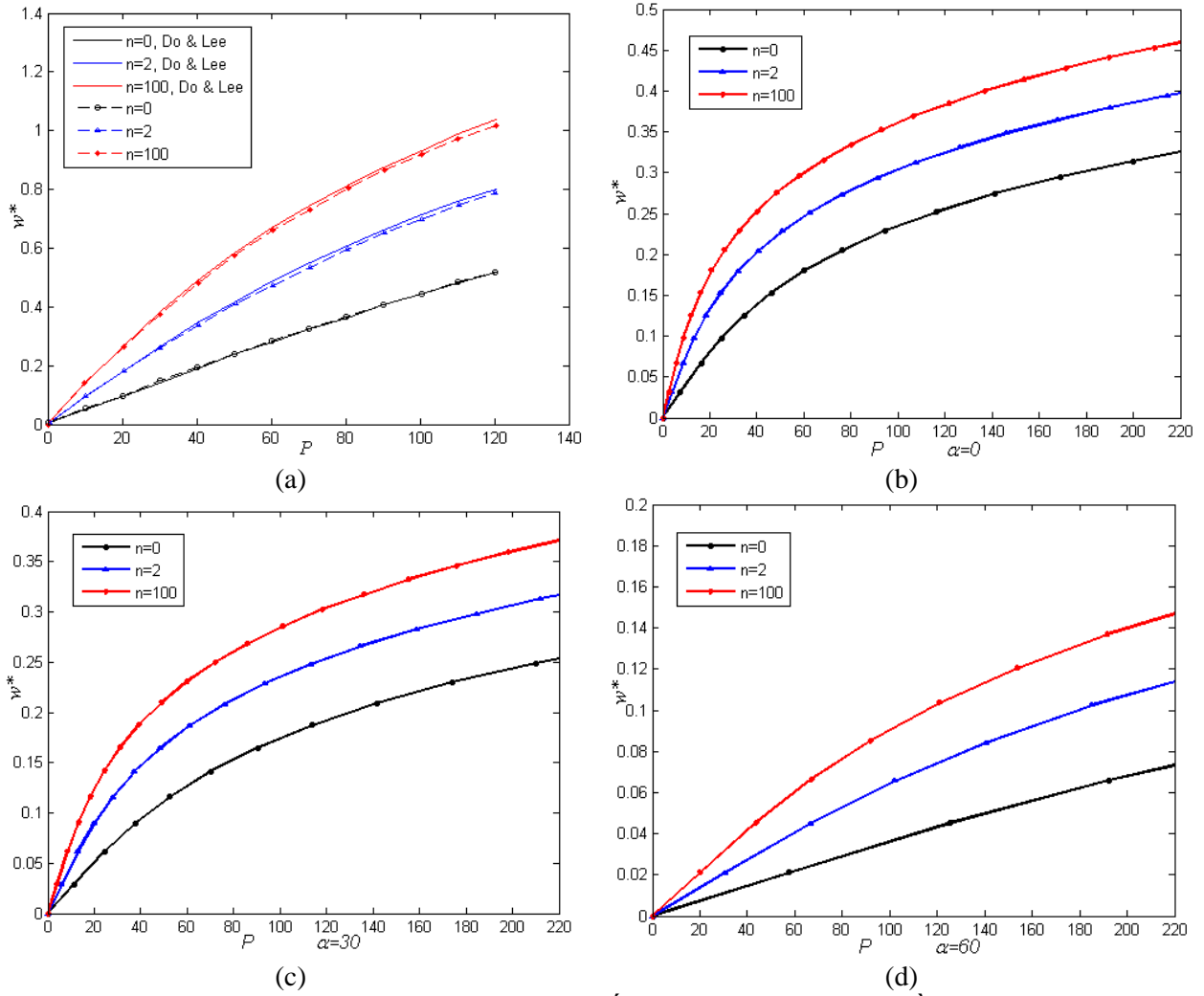
Tham khảo	$a/h$				
	10	20	30	50	100
MISQ24 [5]	23.97 (-0.909%)	31.91 (0%)	34.08 (0.118%)	35.33 (-0.254%)	35.89 (-2.631%)
Kumar [124]	23.97 (-0.909%)	31.79 (-0.376%)	-	35.40 (-0.056%)	36.85 (-0.027%)
Prusty [125]	23.96 (-0.950%)	31.89 (-0.062%)	33.98 (-0.176%)	36.84 (4.009%)	35.39 (-3.988%)
Sciuva [126]	24.19	31.91	34.04	35.42	36.86
SQ4T	24.98 (3.266%)	32.28 (1.160%)	34.12 (0.235%)	35.64 (0.621%)	36.48 (-1.030%)

#### 4.4.4 Phân tích uốn phi tuyến

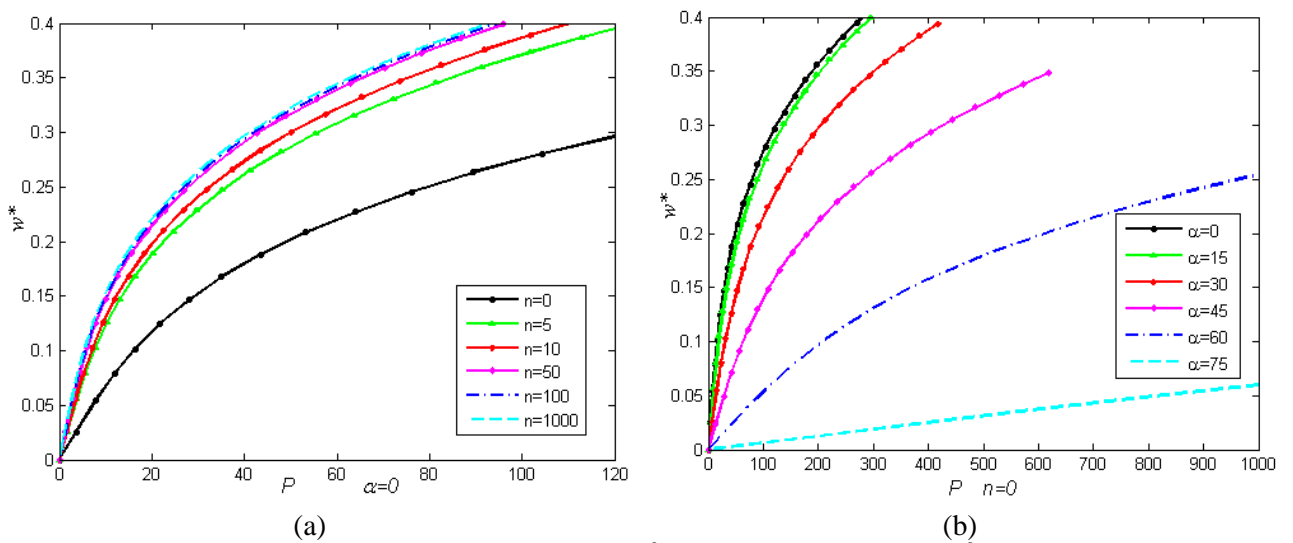
**Hình 4.15:** Tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng FGM

Tấm hình bình hành có  $a = b = 0.2$  m và  $a/h = 20$ , Hình 4.15, liên kết ngàm hoặc tựa đơn các cạnh, làm bằng vật liệu chức năng *Ti-6Al-4V/ Aluminum oxide*, 105.7 GPa/ 320.2 GPa và 0.298/ 0.26. Tấm chịu tải phân bố đều  $q$ . Khảo sát phi tuyến độ võng chuẩn hóa ngay giữa tấm  $w^* = w/h$  với thông số tải trọng  $P = q(a)^4 / (E_m h^4)$  trên cơ sở thay đổi góc  $\alpha$ . Kết quả dựa vào 64 phần tử SQ4T được so sánh với kết quả của nhóm tác giả Van-Do và cộng sự dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT kết hợp phương pháp không lưới nội suy điểm xuyên tâm [127] như Hình 4.16a. Nhóm tác giả này sử dụng 23 x 23 nút rời rạc trên toàn miền khảo sát. Khi thay đổi giá trị  $n$ , đường cong tải trọng-độ võng vẽ bởi SQ4T tiệm cận với đường cong mô tả bởi nhóm tác giả trên.

Bên cạnh đó, khi tăng giá trị  $n$  thì kết cấu trở nên mềm hơn dẫn đến độ võng tăng dần lên và nhận xét này giữ nguyên cho dù thay đổi góc  $\alpha$  hay thay đổi điều kiện biên trên các cạnh như mô tả ở Hình 4.16b-d và Hình 4.17a.



**Hình 4.16:** Đường cong tải trọng-độ võng của tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng liên kết ngầm



**Hình 4.17:** Đường cong tải trọng-độ võng của tấm hình bình hành làm bằng vật liệu phân lớp chức năng liên kết tựa đơn

---

Hình 4.17b cho thấy khi tăng góc  $\alpha$  thì độ võng giảm đi. Điều này có thể giải thích do hình dạng của các phần tử trong lưới trở thành hình thoi dẹp và dài, khác biệt rất nhiều so với hình dạng vuông của các phần tử ánh xạ trong tọa độ tự nhiên nên gây ra lỗi trong tích phân số của ma trận độ cứng dẫn đến kết cấu có vẻ cứng hơn làm suy giảm nhanh độ võng.

#### 4.5 Kết luận

Phần tử SQ4T đã được thiết lập và sử dụng để phân tích tĩnh, dao động tự do và ổn định cho kết cấu dạng tấm/vỏ. Riêng phần phân tích phi tuyến chỉ đưa ra với mục đích định hướng phát triển phần tử này về sau. Kết quả đạt được khi sử dụng phần tử SQ4T có sai số không đáng kể khi so sánh với các kết quả tham khảo khác. Tuy nhiên phần tử này vẫn còn một số nhược điểm sau: (1) vốn dựa vào kỹ thuật nội suy kép tính toán trên miền ảnh hưởng bao quanh phần tử đang xét nên thời gian tính toán cho toàn bộ miền rời rạc sẽ lâu hơn so với các phần tử cơ bản cùng số bậc tự do, sẽ trình bày rõ thời gian ở chương đánh giá chung; (2) kết quả thu được không ổn định cận trên, dưới khi so sánh với nghiệm chính xác; (3) khó áp dụng để tính toán cho vỏ có hình dáng phức tạp. Việc áp dụng phần tử SQ4T cần được khảo sát kỹ cho từng bài toán cụ thể ở tương lai. Quá trình đánh giá chung với các phần tử đề xuất khác được tiến hành ở chương cuối của luận án này.



---

## Chương 5

# PHẦN TỬ SQ4C

### 5.1 Giới thiệu

Trong chương này lần lượt trình bày kỹ thuật tổ hợp biến dạng, xây dựng phần tử tứ giác SQ4C (*Sort...Q4...Combined strain*), kết quả tính toán số minh họa, so sánh và đánh giá. Cuối cùng là những kết luận thu được từ quá trình phân tích lời giải.

### 5.2 Kỹ thuật tổ hợp biến dạng

#### 5.2.1 Kỹ thuật khử khóa cắt

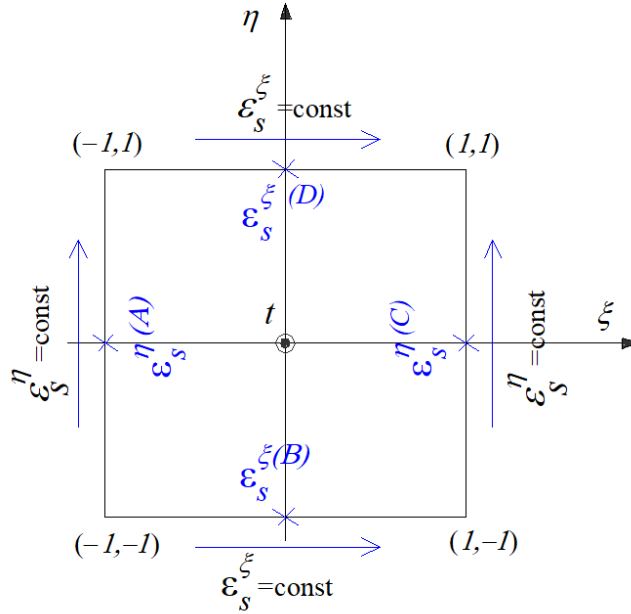
Trên cơ sở nghiên cứu kết cấu tấm/vỏ dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất HSDT, mối quan tâm lớn liên quan đến hiện tượng khóa cắt khi chiều dày của kết cấu trở nên mỏng dẫn đến chuyển vị của tấm/vỏ giảm khi chiều dày giảm do năng lượng biến dạng cắt không được loại bỏ. Để khắc phục hiện tượng khóa cắt, theo các tác giả Bathe và Dvorkin [10, 11], biến dạng cắt ngang được giả sử là hằng số dọc theo cạnh phần tử tứ giác 4 nút như Hình 5.1 trong hệ tọa độ tự nhiên. Từ đó 4 điểm buộc A, B, C và D nằm ở trung điểm 4 cạnh của phần tử sẽ được sử dụng để nội suy các thành phần biến dạng cắt ngang trong phần tử. Việc không tính toán trực tiếp các thành phần biến dạng cắt ngang này trực tiếp từ đạo hàm của trường chuyển vị sẽ giúp quá trình phân tích phần tử hữu hạn khắc phục được hiện tượng khóa cắt xảy ra.

Trường biến dạng cắt ngang được xây dựng thông qua 4 điểm buộc A, B, C và D theo các công thức sau

$$\tilde{\varepsilon}_s^\xi = \frac{1}{2}(1+\eta)\varepsilon_s^{\xi(D)} + \frac{1}{2}(1-\eta)\varepsilon_s^{\xi(B)} \quad (5.1)$$

$$\tilde{\varepsilon}_s^\eta = \frac{1}{2}(1+\xi)\varepsilon_s^{\eta(C)} + \frac{1}{2}(1-\xi)\varepsilon_s^{\eta(A)} \quad (5.2)$$

trong đó  $\varepsilon_s^{\xi(A)}$ ,  $\varepsilon_s^{\xi(B)}$ ,  $\varepsilon_s^{\eta(C)}$ ,  $\varepsilon_s^{\eta(D)}$  là các biến dạng cắt ngang được tính toán trực tiếp thông qua xấp xỉ chuyển vị tại các điểm buộc trên.

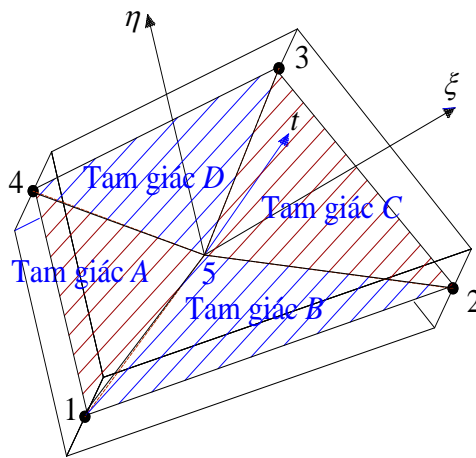


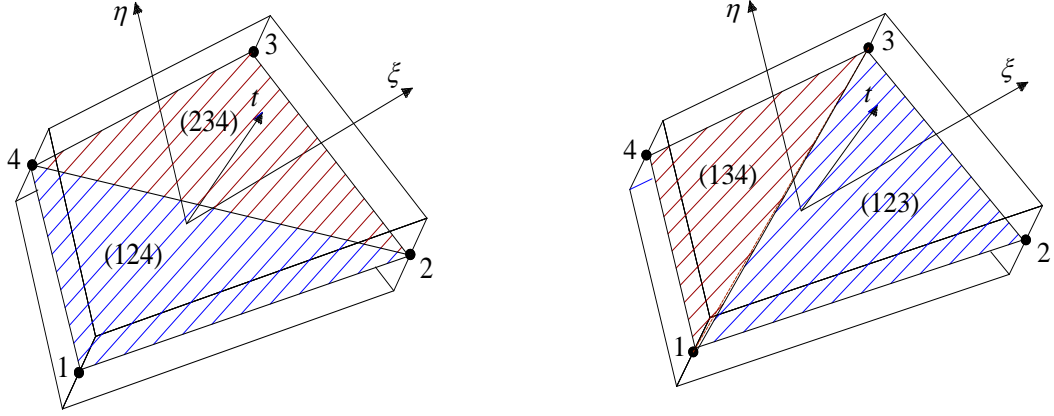
× Điểm buộc

**Hình 5.1:** Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng cắt ngang

### 5.2.2 Kỹ thuật khử khóa màng

Đối với kết cấu vỏ nói riêng, khi tiến hành phân tích dạng kết cấu vỏ có độ cong nhất định với lưới chia méo dễ dẫn đến hiện tượng khóa màng do phần tử sử dụng là phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp. Hiện nhiên hiện tượng khóa màng này có thể được xử lý tốt nếu quá trình phân tích sử dụng phần tử bậc cao. Để khắc phục hiện tượng khóa màng khi sử dụng phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp, theo tác giả Ko và cộng sự [23, 24], đầu tiên tiến hành chia miền phần tử tại mặt trung hòa ra thành 4 miền tam giác con như Hình 5.2.





**Hình 5.2:** Cơ sở xác định nút ảo 5

Nút ảo 5 được xác định thông qua 4 diện tích “124”, “234”, “134” và “123” trong đó 1, 2, 3 và 4 lần lượt là bốn nút của phần tử tứ giác cần xét

$$\mathbf{x}_5 = \sum_{i=1}^4 \zeta_i \mathbf{x}_i \quad (5.3)$$

với

$$\begin{aligned} [\zeta_1 \quad \zeta_2 \quad \zeta_3 \quad \zeta_4] = & \frac{1}{2} \frac{A_{234}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{124}}{A_{234} + A_{124}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ & \frac{1}{2} \frac{A_{134}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \frac{A_{123}}{A_{134} + A_{123}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

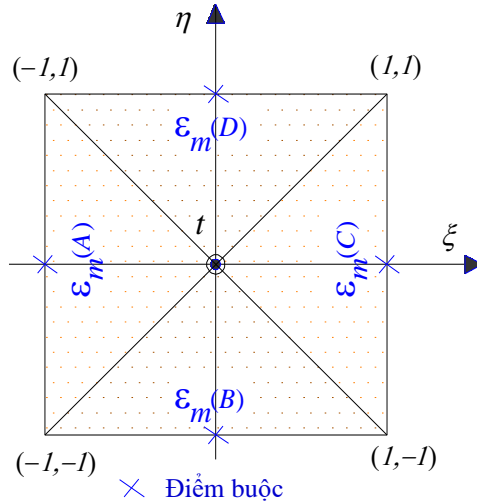
Sau đó, trường biến dạng màng được xây dựng thông qua 4 điểm buộc  $A$ ,  $B$ ,  $C$  và  $D$  như Hình 5.3 và công thức bên dưới

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}) \xi + \frac{1}{2} (-\boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} + \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}) \eta \quad (5.5)$$

hay

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}_m = \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \eta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \xi \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \eta \end{pmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)} \\ \boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

với  $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(A)}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(B)}$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(C)}$  và  $\boldsymbol{\epsilon}_m^{(D)}$  là các biến dạng màng được tính thông qua bốn miền tam giác con và được đặt tại bốn điểm buộc  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , cần lưu ý nhỏ tại nút ảo 5 không hình thành các bậc tự do phụ trợ trong quá trình xây dựng véc-tơ chuyển vị của phần tử đang xét.



**Hình 5.3:** Bốn điểm buộc ứng dụng tính toán biến dạng màng

### 5.2.3 Kỹ thuật trơn biến dạng trên miền con

Biến dạng uốn tại một điểm bất kỳ  $\mathbf{x}_C$  đạt được bởi

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b(\mathbf{x}_C) = \int_{\Omega_C} \boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) d\Omega \quad (5.7)$$

trong đó  $\Omega_C$  là miền tứ giác con đang xét làm trơn, xem Hình 5.4. Trên cơ sở [4, 5, 35], chọn  $\Phi$  như sau

$$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_C) = \begin{cases} 1/A_C & \mathbf{x} \in \Omega_C \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega_C \end{cases} \quad (5.8)$$

Từ đó suy ra

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{2A_C} \int_{\Gamma_C} (\beta_i n_j + \beta_j n_i) d\Gamma \quad (5.9)$$

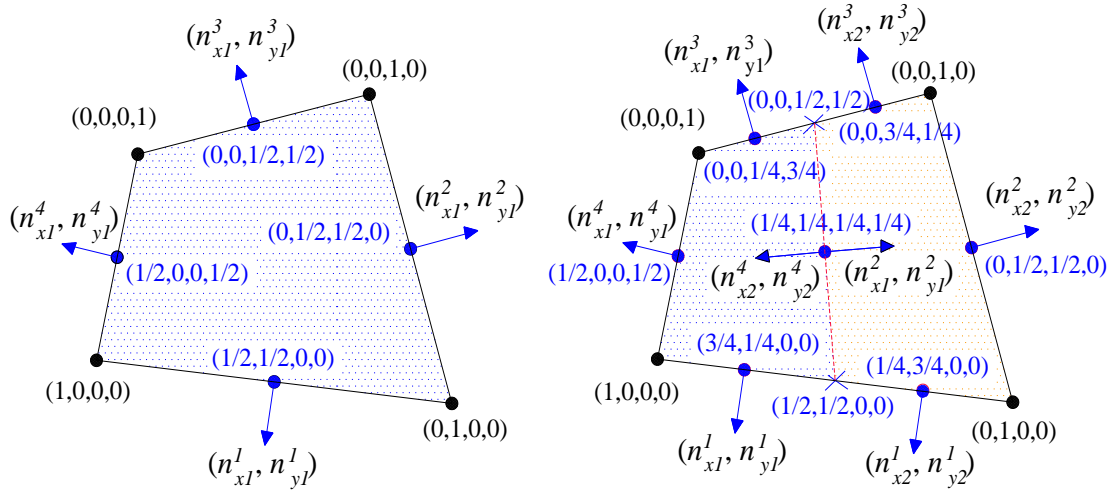
$A_C$  và  $\Gamma_C$  lần lượt là diện tích và biên của miền tứ giác con, công thức (5.7) được viết lại

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_b(\mathbf{x}_C) = \tilde{\mathbf{B}}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_b \quad (5.10)$$

với

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bi}(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} \begin{pmatrix} 0 & N_i n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i n_y \\ 0 & N_i n_y & N_i n_x \end{pmatrix} d\Gamma \quad (5.11)$$

$$\mathbf{q}_{bi} = [w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi}]$$



**Hình 5.4:** Mô tả miền con tứ giác tròn và giá trị các hàm dạng tương ứng

### 5.3 Xây dựng phần tử SQ4C

Phần tử tứ giác SQ4C bao gồm 4 nút mỗi nút có 5 bậc tự do được xây dựng dựa vào kỹ thuật tổ hợp các biến dạng dựa theo mục 5.2 và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT như trình bày ở mục 2.2.1 của chương 2 hoặc mục 4.3.1 của chương 4 để phân tích kết cấu tấm/vỏ composite nhiều lớp có hoặc không có sườn gia cường.

Trước tiên, biến dạng màng của phần tử SQ4C được xác định thông qua giá trị  $\epsilon_m^{(A)}$ ,  $\epsilon_m^{(B)}$ ,  $\epsilon_m^{(C)}$  và  $\epsilon_m^{(D)}$  của 4 miền tam giác con. Cụ thể

$$\begin{aligned}
 \epsilon_m^{(A)} &= \mathbf{B}_m^{\Delta 415} \mathbf{q}_m^{\Delta 415} = \mathbf{B}_m^{\Delta 415} \mathfrak{N}^{\Delta 415} \mathbf{q}_m^{\square 1234} \\
 \mathfrak{N}^{\Delta 415} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix} \\
 \epsilon_m^{(B)} &= \mathbf{B}_m^{\Delta 125} \mathbf{q}_m^{\Delta 125} = \mathbf{B}_m^{\Delta 125} \mathfrak{N}^{\Delta 125} \mathbf{q}_m^{\square 1234} \\
 \mathfrak{N}^{\Delta 125} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix} \\
 \epsilon_m^{(C)} &= \mathbf{B}_m^{\Delta 235} \mathbf{q}_m^{\Delta 235} = \mathbf{B}_m^{\Delta 235} \mathfrak{N}^{\Delta 235} \mathbf{q}_m^{\square 1234} \\
 \mathfrak{N}^{\Delta 235} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix} \\
 \epsilon_m^{(D)} &= \mathbf{B}_m^{\Delta 345} \mathbf{q}_m^{\Delta 345} = \mathbf{B}_m^{\Delta 345} \mathfrak{N}^{\Delta 345} \mathbf{q}_m^{\square 1234}
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

$$\mathbf{N}^{\Delta 345} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta_4 \end{bmatrix}$$

Kết hợp các công thức (5.4), (5.6) và (5.12) với các ma trận  $\mathbf{B}_m^\Delta$  truyền thông xác định tương tự trong [128, 129] thu được

$$\bar{\mathbf{e}}_m = \bar{\mathbf{B}}_m \mathbf{q}_m \quad (5.13)$$

Biến dạng uốn  $\tilde{\mathbf{e}}_b(\mathbf{x}_c)$  của phần tử tứ giác SQ4C được thiết lập dựa theo chuỗi công thức (5.7 ÷ 5.11) với điều kiện sử dụng 1 điểm Gauss trên mỗi cạnh biên miền con khi tính tích phân (5.11). Ma trận  $\tilde{\mathbf{B}}_b(\mathbf{x}_c)$  được xây dựng từ

$$\tilde{\mathbf{B}}_{bi}(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^4 \begin{pmatrix} 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y \\ 0 & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_y & N_i(\mathbf{x}_b^G) n_x \end{pmatrix} l_b^c \quad (5.14)$$

trong đó  $A_c$  và  $\Gamma_c$  lần lượt là diện tích và biên của miền tứ giác con,  $\mathbf{x}_b^G$  là điểm Gauss,  $l_b^c$  là chiều dài cạnh miền con, lưu ý  $n_c = 2$  là số lượng tứ giác con được lựa chọn khi tính toán biến dạng uốn, theo [4, 5, 35].

Biến dạng cắt ngang được viết lại từ các công thức (5.1) và (5.2) như sau

$$\bar{\mathbf{e}}_s = \mathbf{J}^{-1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-\xi) & 0 & (1+\xi) & 0 \\ 0 & (1-\eta) & 0 & (1+\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\eta(A)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\xi(B)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\eta(C)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s^{\xi(D)} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

với

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

Vì vậy biến dạng cắt ngang trong phần tử SQ4C được xác định theo [5, 10, 11] như sau

$$\bar{\mathbf{e}}_s = \bar{\mathbf{B}}_s \mathbf{q}_s \quad (5.17)$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{B}}_{si} = \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{i,\xi} & b_i^{11} \mathbf{N}_{i,\xi} & b_i^{12} \mathbf{N}_{i,\xi} \\ \mathbf{N}_{i,\eta} & b_i^{21} \mathbf{N}_{i,\eta} & b_i^{22} \mathbf{N}_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{q}_{si} = \begin{bmatrix} w_i & \beta_{xi} & \beta_{yi} \end{bmatrix}$$

với

$$\begin{aligned} b_i^{11} &= \xi_i x_{,\xi}^{R_1}, & b_i^{12} &= \xi_i y_{,\xi}^{R_1}, & b_i^{21} &= \eta_i x_{,\eta}^{R_2}, & b_i^{22} &= \eta_i y_{,\eta}^{R_2} \\ \xi_i &\in \{-1 & 1 & 1 & -1\}, & \eta_i &\in \{-1 & -1 & 1 & 1\} \\ (i, R_1, R_2) &\in \{(1, B, A), (2, B, C), (3, D, C), (4, D, A)\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Ma trận độ cứng tổng của phần tử SQ4C được thiết lập

$$\tilde{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_m + \tilde{\mathbf{K}}_{mb} + \tilde{\mathbf{K}}_{mb}^T + \tilde{\mathbf{K}}_b + \bar{\mathbf{K}}_s \quad (5.20)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_m &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega \\ \tilde{\mathbf{K}}_{mb} &= \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{B} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega \\ \tilde{\mathbf{K}}_b &= \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_b^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_b d\Omega = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_{bi}^T \mathbf{D} \tilde{\mathbf{B}}_{bi} A_C, \quad n_c = 2 \\ \bar{\mathbf{K}}_s &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{C}_s \bar{\mathbf{B}}_s d\Omega \end{aligned} \quad (5.21)$$

Khi phân tích ổn định, ma trận độ cứng hình học của phần tử được làm tròn với số lượng miền con  $n_c = 1$ , theo [5]

$$\tilde{\mathbf{K}}_g = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{B}}_g^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \tilde{\mathbf{B}}_g d\Omega = \sum_{i=1}^{n_c} \tilde{\mathbf{B}}_{gi}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \tilde{\mathbf{B}}_{gi} A_C, \quad n_c = 1 \quad (5.22)$$

với

$$\tilde{\mathbf{B}}_{gi}(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \int_{\Gamma_C} \begin{bmatrix} N_i n_x & 0 & 0 \\ N_i n_y & 0 & 0 \\ 0 & N_i n_x & 0 \\ 0 & N_i n_y & 0 \\ 0 & 0 & N_i n_x \\ 0 & 0 & N_i n_y \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.23)$$

Sử dụng 1 điểm Gauss trên mỗi cạnh biên khi tính tích phân (5.23) nên  $\tilde{\mathbf{B}}_{gi}(\mathbf{x}_C)$  được viết lại

$$\tilde{\mathbf{B}}_{gi}(\mathbf{x}_C) = \frac{1}{A_C} \sum_{g=1}^4 \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x & 0 & 0 \\ N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_x \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}_g^G) n_y \end{bmatrix} l_g^C \quad (5.24)$$

$\mathbf{x}_g^G$  là điểm Gauss,  $l_g^C$  là chiều dài cạnh miền con, các ma trận  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{M}$  và  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0$  tiếp tục sử dụng theo các công thức (2.47), (2.52) & (2.54) của chương 2.

Trường hợp kết cấu tấm có gắn sườn gia cường, phần tử SQ4C được thêm bậc tự do thứ 6 là  $\beta_z$  cho mỗi nút theo Allman [130], Nguyen-Van [5], Nguyen-Thoi và cộng sự [48, 131], Ibrahimbegovic và cộng sự [132],... Ma trận  $\bar{\mathbf{K}}_m$  ở công thức (5.20) trở thành

$$\bar{\mathbf{K}}_m = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}_m^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{B}}_m d\Omega + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{b} d\Omega \quad (5.25)$$

trong đó  $\gamma = G$  theo tác giả Ibrahimbegovic và cộng sự [132] với

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} N_{i,y} \\ -\frac{1}{2} N_{i,x} \\ -\frac{1}{2} (N x_{i,y} + N y_{i,x}) - N_i \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

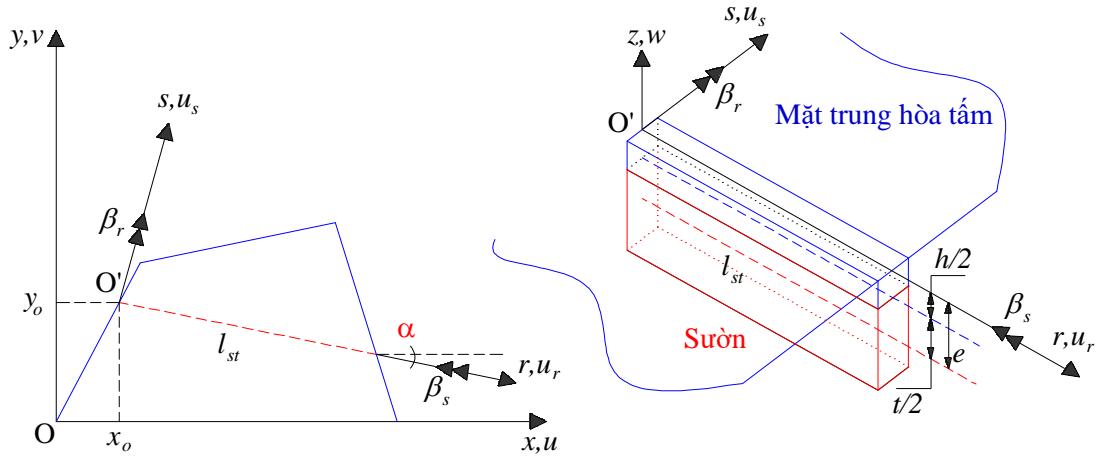
và

$$\begin{aligned} N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta), \quad i = 1, 2, 3, 4 \\ N x_i &= \frac{1}{8} (y_{ij} N_l - y_{ik} N_m) \\ N y_i &= \frac{1}{8} (x_{ij} N_l - x_{ik} N_m) \\ x_{ij} &= x_j - x_i \\ y_{ij} &= y_j - y_i \end{aligned} \quad (5.27)$$

Các thông số  $i, j, k, l$  và  $m$  được diễn đạt qua phần mềm *Matlab* như sau

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad m = i + 4; \quad l = m - 1 + 4 * \text{floor}(1/i); \quad k = \text{mod}(m, 4) + 1; \quad j = l - 4;$$





**Hình 5.5:** Mô tả kết cấu tấm gia cường sườn

Sử dụng lý thuyết dầm Timoshenko để tính toán cho sườn gia cường. Trong trường hợp tổng quát trục sườn hợp với phương  $x$  một góc  $\alpha$  như Hình 5.5. Chiều dài phần tử sườn  $l_{st}$  giới hạn trong phạm vi phần tử tứ giác SQ4C và tùy thuộc vào lưới chia cho tấm,  $h$  và  $t$  lần lượt là chiều dày tấm và chiều cao của sườn gia cường. Hệ trục địa phương  $O'rsz$  gắn với sườn có mặt phẳng  $O'rs$  trùng với mặt phẳng  $Oxy$  như Hình 5.5. Tại vị trí tiếp xúc, chuyển vị của sườn và tấm là giống nhau. Công thức chuyển trục

$$\mathbf{u}_{st} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{bmatrix} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (5.28)$$

Lưu ý ký hiệu “ $st$ ” đề cập đến đối tượng là sườn gia cường. Biến dạng trong sườn được tính như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{st} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r \\ u_s \\ u_z \\ \beta_r \\ \beta_s \\ \beta_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 & e \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{L}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{u} \quad (5.29)$$

trong đó  $e$  là độ lệch giữa trục sườn với mặt trung hòa của tấm. Với việc sử dụng phần tử dầm 2 nút Timoshenko đẳng tham số để mô hình cho sườn

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 N_i^{st} \mathbf{I}_6 \mathbf{q}_i^{st} \quad (5.30)$$

$N_1^{st} = \frac{1}{2}(1-\xi)$  và  $N_2^{st} = \frac{1}{2}(1+\xi)$  là các hàm dạng tuyến tính trong hệ tọa độ tự nhiên gắn với phần tử dầm. Ma trận độ cứng của phần tử dầm trình bày dưới dạng

$$\mathbf{K}_e^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st})^T \mathbf{D}^{st} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st} dl \quad (5.31)$$

Ma trận độ cứng hình học của phần tử dầm

$$\mathbf{K}_{eg}^{st} = \int_{l_e} (\boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st})^T \boldsymbol{\sigma}^{st} \boldsymbol{\varphi} \mathbf{N}^{st} dl \quad (5.32)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{st} &= \text{diag} \left( EA_{st}, EI_s, \frac{5}{6} GA_{st}, GJ \right) \\ \boldsymbol{\sigma}^{st} &= \text{diag} \left( A_{st} \sigma_x^0, (I_s + e^2 A_{st}) \sigma_x^0 \right) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$A_{st}$  là diện tích mặt cắt ngang của dầm,  $I_s$  là momen quán tính đối với trục  $s$ ,  $J \approx A_{st}^4 / 40I_r$  là hằng số xoắn St Venant và  $I_r$  là momen quán tính đối với trục  $r$ , ngoài ra  $E, G$  là các hằng số mô đun vật liệu.

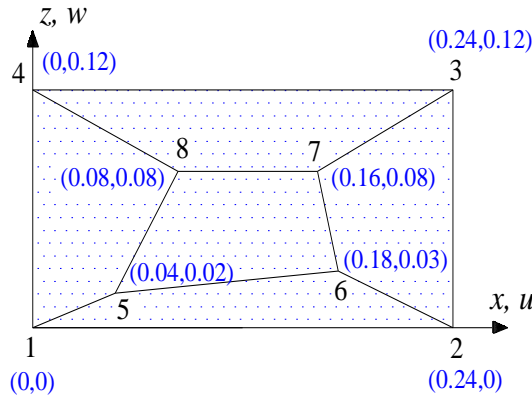
## 5.4 Kết quả số

### 5.4.1 Kiểm chứng

Khảo sát tổ hợp 5 phần tử tứ giác SQ4C như Hình 5.6. Đặc trưng vật liệu  $E = 10^6$ ,  $\mu = 0.25$  với chiều dày  $h = 0.001$ . Các điều kiện biên được áp đặt như sau: (1) kiểm chứng ứng xử màng  $u = 10^{-3}(x+0.5y)$ ,  $v = 10^{-3}(y+0.5x)$ ,  $w = 0$  và (2) kiểm chứng ứng xử uốn  $w = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2$ ,  $\beta_x = 10^{-3}(y+0.5x)$ ,  $\beta_y = 10^{-3}(x+0.5y)$ . Kết quả thu được bởi phần tử SQ4C giống kết quả nghiệm chính xác như trình bày ở Bảng 5.1.

**Bảng 5.1:** Kết quả kiểm chứng

Trường hợp		SQ4C	Chính xác
Ứng xử màng	$\sigma_x$	1.33300000E3	1333
	$\sigma_y$	1.33300000E3	1333
	$\tau_{xy}$	0.40000000E3	400
Ứng xử uốn	$M_x$	1.11111111E-7	1.11111111E-7
	$M_y$	1.11111111E-7	1.11111111E-7
	$M_{xy}$	0.33333333E-7	0.33333333E-7



**Hình 5.6:** Mô tả kiểm chứng

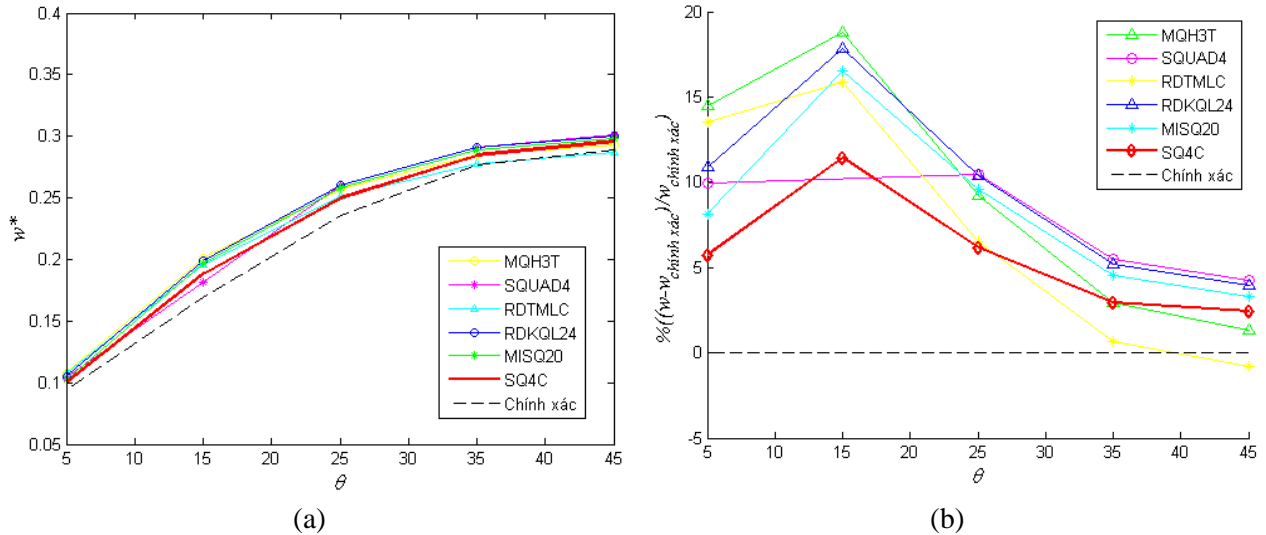
## 5.4.2 Phân tích uốn tĩnh

### 5.4.2.1 Tấm vuông 2 lớp $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ chịu tải phân bố đều

Một tấm vuông  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$  có kích thước  $a = 10$ , chiều dày  $h = 0.02$  chịu tải trọng phân bố đều  $q = 1$ , liên kết ngàm các cạnh tương tự Hình 4.9a của chương 4. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Độ võng chuẩn hóa ở giữa tấm  $w^* = 100E_2wh^3/(qa^4)$  tính bởi phần tử SQ4C (605 dofs) được so sánh với các kết quả tham khảo khác dựa vào các phần tử MQH3T (665 dofs), SQUAD4 (605 dofs), RDTMLC (605 dofs), RDKQ-L24 (605 dofs), MISQ20 (605 dofs) và nghiệm chính xác đưa ra bởi tác giả Whitney theo [5, 96-101] tương tự mục 4.4.1.2 ở chương 4. Chúng được nêu ra ở Bảng 5.2 và Hình 5.7. Dựa vào Hình 5.7 có thể thấy kết quả thu được bởi phần tử SQ4C tiệm cận với nghiệm chính xác và đạt được độ hội tụ tốt hơn kết quả của các phần tử khác. Từ mục 5.4.1.1 này kết hợp với mục 4.4.1.2 cho thấy phần tử SQ4C ổn định và cho kết quả hội tụ tốt hơn phần tử SQ4T khi phân tích tĩnh kết cấu.

**Bảng 5.2:** Độ võng chuẩn hóa giữa tấm vuông đa lớp liên kết ngàm chịu tải phân bố đều

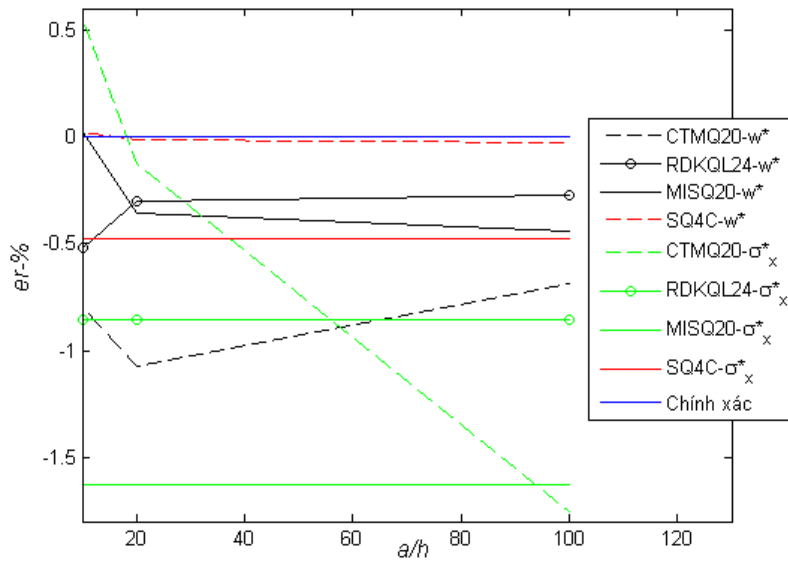
$\theta$	MQH3T [96]	SQUAD4 [97]	RDTMLC [98]	RDKQ-L24 [99]	MISQ20 [5]	SQ4C	Chính xác [100, 101]
5°	0.1083	0.1040	0.1074	0.1049	0.1023	0.1000	0.0946
15°	0.2009	-	0.1959	0.1993	0.1971	0.1884	0.1691
25°	0.2572	0.2602	0.2508	0.2599	0.2580	0.2500	0.2355
35°	0.2844	0.2914	0.2782	0.2907	0.2889	0.2844	0.2763
45°	0.2929	0.3013	0.2868	0.3004	0.2986	0.2960	0.2890



**Hình 5.7:** (a) So sánh độ võng chuẩn hóa, (b) So sánh sai số độ võng chuẩn hóa tấm vuông  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$  liên kết ngàm

#### 5.4.2.2 Tấm vuông 2 lớp $[-45^\circ/45^\circ]$ chịu tải phân bố hình sin

Tấm vuông  $[-45^\circ/45^\circ]$  có kích thước  $a = 10$ , dày  $h = 0.02$  chịu tải trọng phân bố hình sin với  $q_0 = 1$ , liên kết tựa đơn các cạnh như Hình 4.9b của chương 4. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ,  $G_{23} = 0.5E_2$ ,  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ .



**Hình 5.8:** Sai số của độ võng ( $w^*$ ) và ứng suất ( $\sigma_x^*$ )

Các kết quả chuẩn hóa độ võng  $w^* = 100E_2wh^3 / (q_0a^4)$ , ứng suất  $\sigma_x^* = \sigma_x h^2 / (q_0a^2)$  tại điểm  $(a/2, a/2, h/2)$ ; ứng suất  $\tau_{xy}^* = \tau_{xy} h^2 / (q_0a^2)$  tại điểm  $(0, 0, -h/2)$ ; ứng suất  $\tau_{xz}^* = \tau_{xz} h^2 / (q_0a^2)$  tại điểm  $(0, a/2, h/4)$  tính bởi phần tử SQ4C (lưới  $10 \times 10$ , 605 dofs)

được so sánh với các kết quả khác theo [5, 65, 99, 103] như mục 4.4.1.3 của chương 4. Có thể nhắc lại các phân tử so sánh với lưới chia trên toàn miền như sau: CTMQ20 (8 x 8), RDKQ-L24 (10 x 10), MFE (8 x 8), MISQ20 (10 x 10). Tất cả kết quả được thể hiện ở Bảng 5.3 và Hình 5.8.

**Bảng 5.3:** Các kết quả chuẩn hóa của tấm vuông đa lớp liên kết tựa đơn chịu tải phân bố hình sin

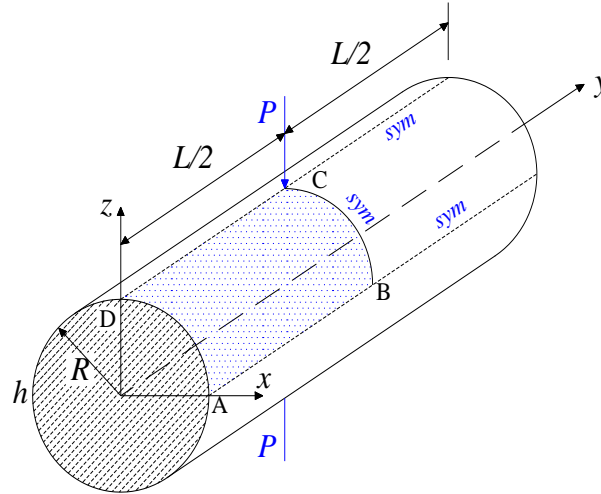
$a/h$	Phân tử / Lý thuyết	$w^*$	$\sigma_x^*$	$\tau_{xy}^*$	$\tau_{xz}^*$
100	CTMQ20 [5]	0.6519	0.2474	0.2295	0.1194
	RDKQ-L24 [99]	0.6546	0.2500	0.2316	0.1597
	MFE [102]	0.6558	-	-	-
	MISQ20 [5]	0.6553	0.2459	0.2304	0.1884
	SQ4C	0.6562	0.2486	0.2327	0.1884
	Chính xác FSDT [5, 65]	0.6564	0.2498	0.2336	0.2143
20	CTMQ20 [5]	0.6906	0.2523	0.2333	0.1773
	RDKQ-L24 [99]	0.6960	0.2516	0.2316	0.2020
	MFE [102]	-	-	-	-
	MISQ20 [5]	0.6973	0.2456	0.2304	0.1884
	SQ4C	0.6980	0.2486	0.2327	0.1884
	Chính xác FSDT [5, 65]	0.6981	0.2498	0.2336	0.2143
10	CTMQ20 [5]	0.8218	0.2543	0.2349	0.2005
	RDKQ-L24 [99]	0.8241	0.2517	0.2316	0.2053
	MFE [102]	0.8257	-	-	-
	MISQ20 [5]	0.8286	0.2459	0.2304	0.1884
	SQ4C	0.8286	0.2486	0.2327	0.1884
	Chính xác FSDT [5, 65]	0.8284	0.2498	0.2336	0.2143

Dựa vào Hình 5.8, khi thay đổi tỉ số  $a/h$  của tấm thì kết quả đạt được bởi phân tử SQ4C vẫn ổn định. Điều này chứng tỏ phân tử SQ4C khắc phục tốt hiện tượng khóa cắt khi chiều dày tấm trở nên mỏng.

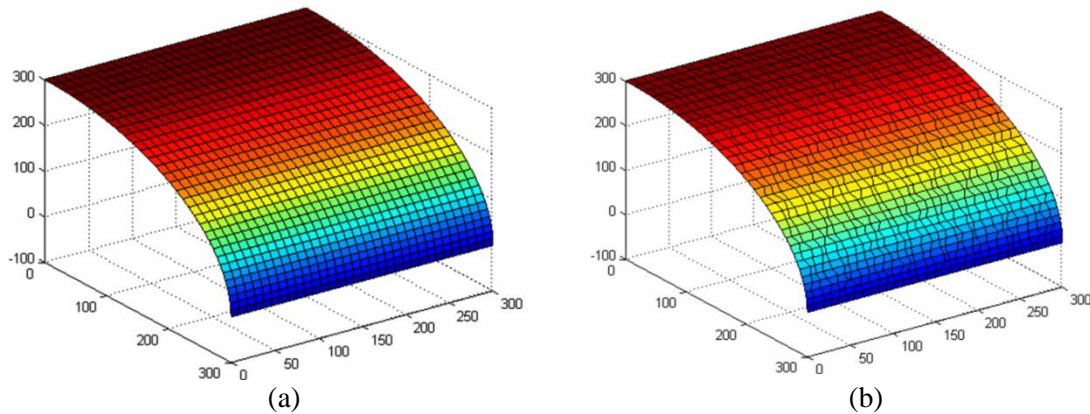
#### 5.4.2.3 Vỏ trụ $[0^\circ/90^\circ]$ , $[-45^\circ/45^\circ]$ , $[0^\circ/90^\circ]_5$ và $[-45^\circ/45^\circ]_5$ với màng cứng hai đầu và chịu tải tập trung ở giữa

Xét vỏ trụ với màng cứng ở hai đầu và chịu ép giữa bởi 2 lực tập trung  $P = 1$  hướng tâm như Hình 5.9. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 25$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ;  $G_{23} = 0.2E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Đặc trưng hình học  $R = 300$  và  $L = 600$ . Liên quan đến yếu tố đối xứng nên 1/8 kết cấu sẽ được phân tích trên cơ sở chia lưới vuông và lưới méo như Hình 5.10. Kết quả độ võng chuẩn hóa tại C:  $w_C^* = 10E_1w_C(a/2, a/2)h^3 / (PR^2)$  của vỏ composite  $[0^\circ/90^\circ]$ ,  $[-45^\circ/45^\circ]$ ,  $[0^\circ/90^\circ]_5$  và  $[-45^\circ/45^\circ]_5$  dưới những giá trị khác nhau của tỷ số  $S =$

$R/h$  được trình bày ở Bảng 5.4 trên cơ sở so sánh với [5, 65]. Như đã trình bày ở công thức (4.46) của chương 4, hệ số  $s=0.4$  được chọn khi đề cập đến lưới méo cho mọi bài toán liên quan.



**Hình 5.9:** Vỏ trụ với màng cứng ở hai đầu



**Hình 5.10:** Mô hình 1/8 vỏ trụ với a) lưới vuông và b) lưới méo

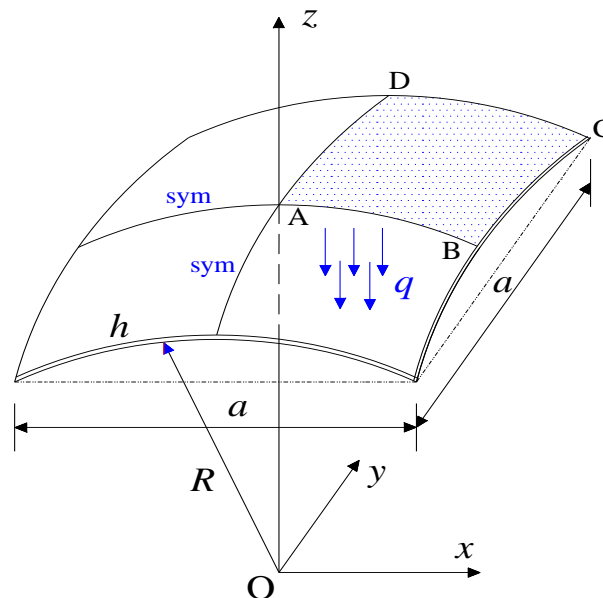
**Bảng 5.4:** Các kết quả độ võng chuẩn hóa tại C

$S=R/h$	Phần tử / Lý thuyết	Sắp xếp			
		$[0^\circ/90^\circ]$	$[-45^\circ/45^\circ]$	$[0^\circ/90^\circ]_5$	$[-45^\circ/45^\circ]_5$
20	MISQ20 [5] (32x32)	4.4678	5.4868	3.7960	4.0132
	SQ4C (lưới vuông) (32x32)	4.5297	5.2923	4.1698	3.7519
	SQ4C (lưới méo) (32x32)	4.6400	5.3913	4.2565	3.7854
	Reddy [65]	6.0742	5.2275	4.2118	3.6457
50	MISQ20 [5] (32x32)	1.7988	2.1124	1.6559	1.3496
	SQ4C (lưới vuông) (32x32)	1.8734	2.1505	1.5531	1.3349
	SQ4C (lưới méo) (32x32)	1.9462	2.2561	1.6044	1.3200
	Reddy [65]	2.3756	2.2283	1.4527	1.2986
100	MISQ20 [5] (32x32)	0.8162	1.0500	0.4895	0.6238
	SQ4C (lưới vuông) (32x32)	0.9433	1.0991	0.5382	0.6853
	SQ4C (lưới méo) (32x32)	1.0675	1.1170	0.5506	0.6925
	Reddy [65]	1.2450	1.3065	0.7405	0.7373

Dựa vào Bảng 5.4, kết quả của phần tử SQ4C tiến gần đến kết quả nghiệm của tác giả Reddy hơn so với phần tử tứ giác 4 nút tron biên dạng MISQ20.

#### 5.4.2.4 Vỏ cầu $[(0^\circ/90^\circ)_4/0^\circ]$ và $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$ chịu tải phân bố đều

Vỏ cầu composite tựa đơn trên bốn cạnh và chịu tải phân bố đều  $q = 1$  được xem xét như Hình 5.11. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ;  $G_{23} = 0.5E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ . Đặc trưng hình học  $R = 10$  và  $a = 1$ . Rõ ràng  $1/4$  kết cấu vỏ được dùng để phân tích. Độ võng tại A theo phương  $z$  của vỏ composite  $[(0^\circ/90^\circ)_4/0^\circ]$  và  $[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$  được tính toán, trình bày và so sánh với các kết quả khác theo [5, 119, 133-135] như Bảng 5.5.



**Hình 5.11:** Vỏ cầu chịu tải phân bố đều

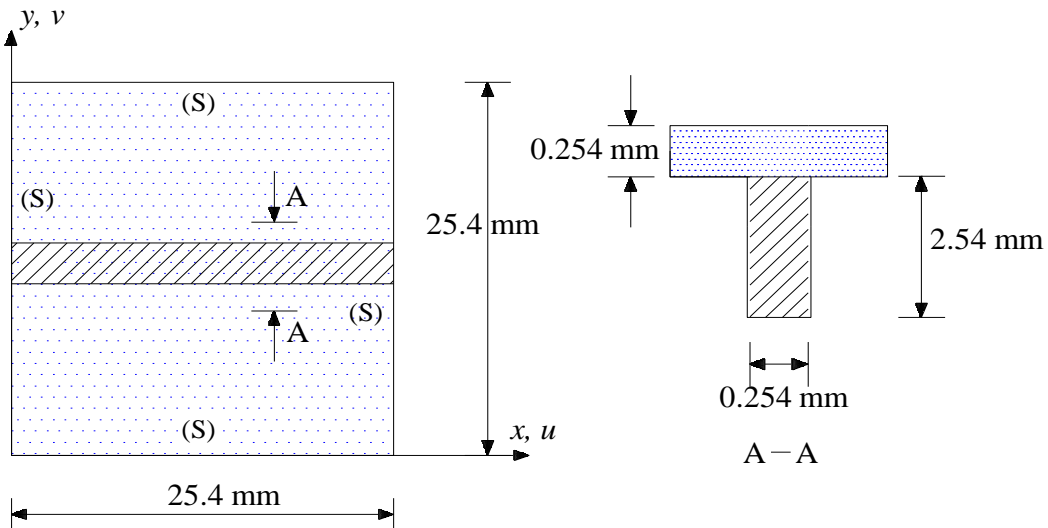
Cụ thể kết quả từ phần tử vỏ composite phẳng tam giác 3 nút đề xuất bởi tác giả To và cộng sự [133] với lưới chia  $10 \times 10$ , phần tử vỏ 4 nút của tác giả Park và cộng sự [134] cũng với lưới chia  $10 \times 10$  trên toàn miền, phần tử vỏ đa lớp 4 nút không đẳng hướng đề xuất từ tác giả Somashekar và cộng sự [135] dựa trên lưới chia  $16 \times 16$ , phần tử MISQ20 với lưới chia  $16 \times 16$  của tác giả Nguyen-Van [5] và nghiệm chính xác của tác giả Reddy [119]. Sai số giữa kết quả phần tử SQ4C với lưới chia  $16 \times 16$  và nghiệm chính xác cũng được thể hiện ở Bảng 5.5, rõ ràng với hướng sợi loại 1 sai số bé hơn so với loại 2.

**Bảng 5.5:** Độ võng  $w_A \times 10^{-3}$  tại A

$a/h$	Phần tử / Lý thuyết	Sắp xếp	
		$[(0^\circ/90^\circ)_4/0^\circ]$	$[(45^\circ/-45^\circ)_4/45^\circ]$
100	To và cộng sự [133]	2.7170	0.5259
	Park và cộng sự [134]	2.7010	0.5337
	Somashekar và cộng sự [135]	2.7270	0.5270
	MISQ20 [5]	2.8005	0.5369
	SQ4C	2.8421	0.5399
			(4.604%)
	Chính xác [119]	2.7170	0.5170
1000	To và cộng sự [133]	0.0588	0.0101
	Park và cộng sự [134]	0.0591	0.0105
	Somashekar và cộng sự [135]	0.0599	0.0088
	MISQ20 [5]	0.0592	0.0063
	SQ4C	0.0575	0.0088
			(-2.872%)
	Chính xác [119]	0.0592	0.0105

#### 5.4.2.5 Hệ kết cấu tấm vuông với sườn ngang gia cường, vật liệu đẳng hướng và chịu tải phân bố đều

Tấm vuông tựa đơn được gia cường một sườn ngang với các thông số hình học như Hình 5.12. Kết cấu này chịu tải phân bố đều  $q = 6.89476 \times 10^{-3} \text{ N/mm}^2$ , đặc trưng vật liệu  $E = 1.1721 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$  và  $\mu = 0.3$ . Chia lưới  $4 \times 4$ ,  $6 \times 6$ ,  $8 \times 8$ ,  $10 \times 10$ ,  $12 \times 12$  và  $14 \times 14$  đồng thời tiến hành xác định độ võng được chuẩn hóa  $w^* = w_{central} / (qL^4 / 100D)$  ngay giữa tấm.

**Hình 5.12:** Tấm vuông tựa đơn được gia cường một sườn ngang

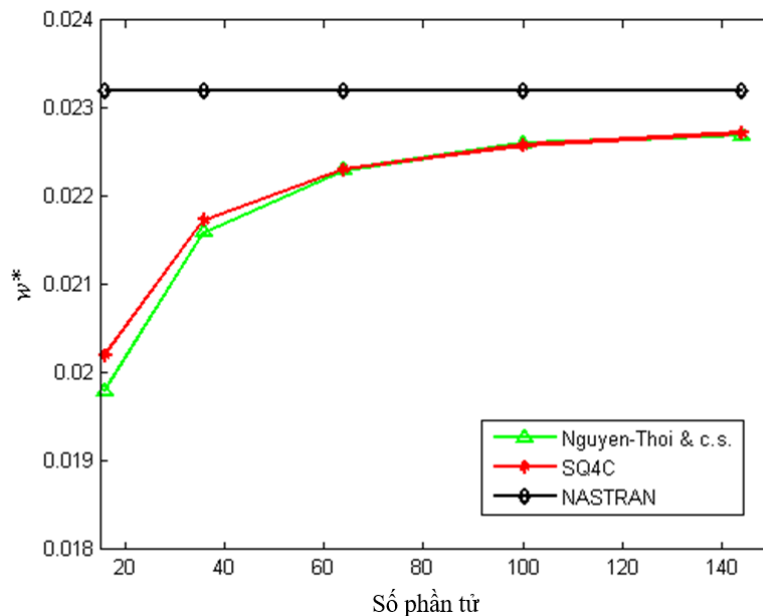
Kết quả của phần tử SQ4C được so sánh với các kết quả khác, cụ thể kết quả từ phần tử tam giác dựa trên CS-FEM-DSG3 của tác giả Nguyen-Thoi và cộng sự [48], phương



pháp ràng buộc trên cơ sở nguyên lý thế năng toàn phần cực tiểu của tác giả Rossow và cộng sự [136], trích xuất kết quả phân mềm Nastran từ tài liệu [136]. Chúng được thể hiện như Bảng 5.6 và Hình 5.13.

**Bảng 5.6:** So sánh độ võng chuẩn hóa ngay chính giữa tấm

Chia lưới	Độ võng trung tâm			
	Nguyen Thoi và cộng sự [48]	Rossow [136]	Nastran [136]	SQ4C
4×4	0.0198	-	-	0.02016
6×6	0.0216	-	-	0.02171
8×8	0.0223	0.0213	0.0232	0.02230
10×10	0.0226	-	-	0.02257
12×12	0.0227	-	-	0.02272
14×14	-	-	-	0.02281



**Hình 5.13:** Độ hội tụ của độ võng được chuẩn hóa

### 5.4.3 Phân tích dao động tự do

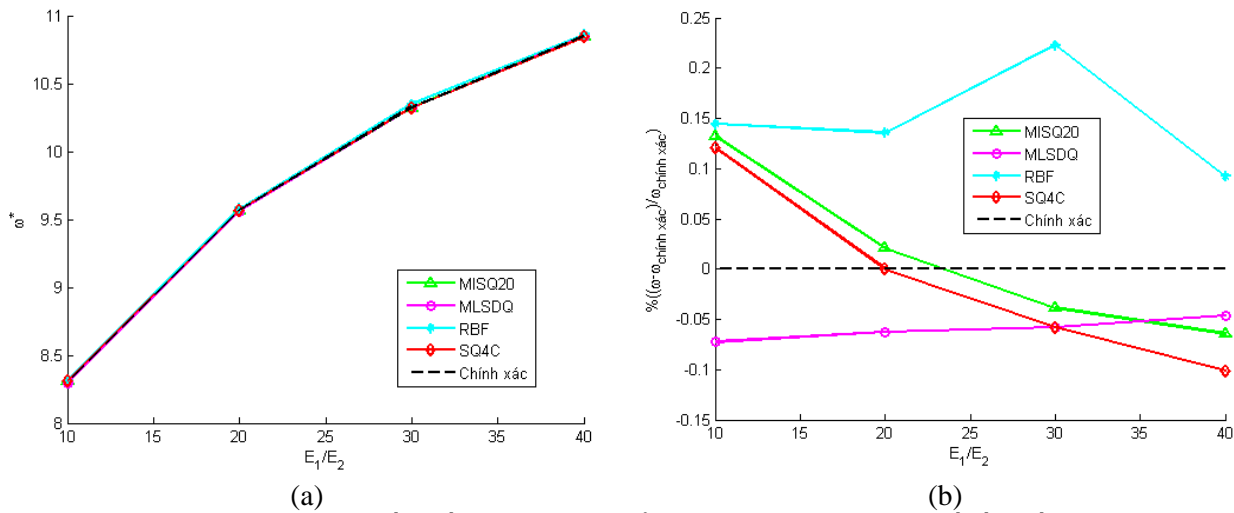
#### 5.4.3.1 Tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  liên kết tựa đơn các cạnh được phân tích dao động dưới sự thay đổi giá trị của tỷ số  $E_1/E_2$  hoặc  $a/h$  tương tự mục 4.4.2.1. Bảng 5.7 và Bảng 5.8 tiến hành so sánh tần số dao động tự do dạng đầu tiên được chuẩn hóa  $\omega^* = (\omega L^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$  dựa trên phần tử SQ4C với lưới chia 14 x 14 và các kết quả tham khảo khác dựa vào

phần tử MISQ24, phương pháp MLSDQ (*moving least squares differential quadrature*) hay RBF (*radial basis function*) hoặc từ nghiệm giải tích theo các lý thuyết phân tích khác nhau như đã giới thiệu cụ thể ở mục 4.4.2.1 của chương 4. Có thể nhắc lại ngắn gọn như sau: phần tử MISQ24 sử dụng lưới 14 x 14 với 196 phần tử, các phương pháp không lưới MLSDQ hay RBF sử dụng 121 nút rời rạc trên toàn miền. Ngoài ra Hình 5.14 thể hiện đồ thị so sánh giá trị tần số dao động chuẩn hóa dạng đầu tiên này ứng với  $a/h = 5$ , đồng thời sáu dạng dao động đầu tiên ứng với  $E_1/E_2 = 40$ ,  $a/h = 5$  cũng được mô tả ở Hình 5.15.

**Bảng 5.7:** So sánh tần số dao động chuẩn hóa ứng với  $a/h=5$

Phần tử	$E_1/E_2$			
	10	20	30	40
MISQ24 [5]	8.309 (0.132%)	9.569 (0.021%)	10.322 (-0.038%)	10.847 (-0.064%)
MLSDQ [104]	8.292 (-0.072%)	9.561 (-0.062%)	10.320 (-0.058%)	10.849 (-0.046%)
RBF [105]	8.310 (0.147%)	9.580 (0.135%)	10.349 (0.223%)	10.864 (0.092%)
SQ4C	8.308 (0.121%)	9.567 (0%)	10.320 (-0.058%)	10.843 (-0.101%)
Chính xác [5, 65, 107]	8.298	9.567	10.326	10.854

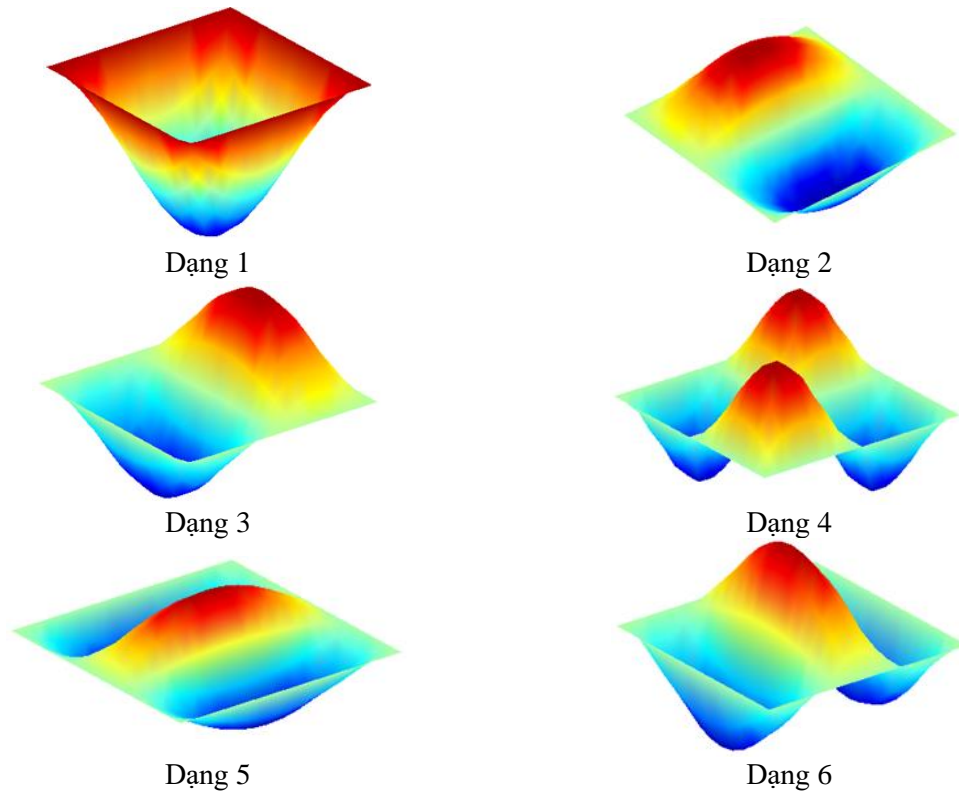


**Hình 5.14:** (a) So sánh tần số dao động chuẩn hóa, (b) So sánh sai số tần số dao động chuẩn hóa tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  liên kết tựa đơn với  $a/h = 5$

Hình 5.14b cho thấy nghiệm của phần tử SQ4C phụ thuộc vào sự thay đổi tỷ số  $E_1/E_2$ , xấp xỉ với kết quả của phần tử MISQ24 cũng như phương pháp MLSDQ và tốt hơn kết quả của phương pháp RBF.

**Bảng 5.8:** So sánh tần số dao động chuẩn hóa ứng với  $E_1/E_2=40$ 

Phần tử / Lý thuyết	$a/h$					
	5	10	20	25	50	100
MISQ24 [5]	10.847	15.165	17.719	18.138	18.753	18.918
p-Ritz [109]	10.855	15.143	17.658	18.071	18.673	18.836
RBF_pseudospectral [110]	10.807	15.100	17.633	18.049	18.658	18.822
HSDT [116]	10.989	15.268	17.666	18.049	18.462	18.756
HOIL [113]	10.673	15.066	17.535	18.054	18.670	18.835
Local theory [111]	10.682	15.069	17.636	18.055	18.670	18.835
Global theory [112]	10.687	15.072	17.636	18.055	18.670	18.835
Global-Local [114]	10.729	15.165	17.803	18.240	18.902	19.156
SQ4C	10.843	15.190	17.732	18.147	18.756	18.919

**Hình 5.15:** Sáu dạng dao động đầu tiên ứng với  $E_1/E_2 = 40$  và  $a/h = 5$ 

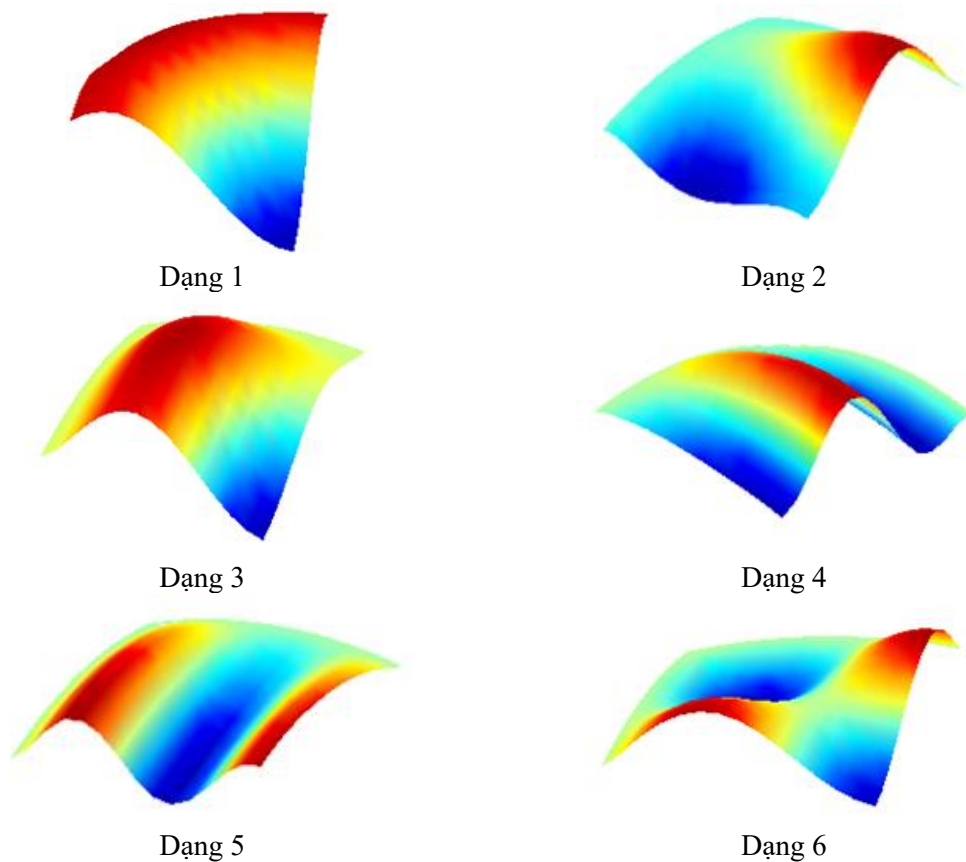
#### 5.4.3.2 Vỏ cầu 9 lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$

Vỏ cầu  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  gồm các cạnh với thông số hình học  $R = 10$ ,  $a = 1$  và  $h = 0.01$  tiếp tục được xem xét như Hình 5.11. Đặc trưng vật liệu  $E_1=2.0685 \times 10^{11}$ ;  $E_1/E_2 = 40$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$ ;  $G_{23} = 0.6E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ ;  $\rho = 1605$ . Giá trị tần số dao động chuẩn hóa  $\omega^* = (\omega a^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$  tương ứng bốn dạng dao động đầu tiên được tính toán bởi 14 x 14 phần tử SQ4C, được trình bày và so sánh với các kết quả khác dựa vào phần tử 4 nút trơn biến dạng MISQ24 [5] tương ứng lưới chia 14 x 14 hay phần

từ vỏ suy biến 9 nút của nhóm tác giả Jayasankar và cộng sự [118] với lưới chia 15 x 15 như thể hiện ở Bảng 5.9. Kết quả đạt được bởi phần tử SQ4C không sai số nhiều so với các phần tử còn lại trong Bảng 5.9. Bên cạnh đó, sáu dạng dao động đầu tiên của ¼ vỏ được thể hiện trên Hình 5.16.

**Bảng 5.9:** So sánh tần số dao động chuẩn hóa

Mô hình	Dạng 1	Dạng 2	Dạng 3	Dạng 4
Jayasankar và cộng sự [118]	67.43	84.16	99.71	113.70
MISQ24 [5]	67.51	86.00	101.27	115.88
SQ4C	67.79	85.21	100.89	116.04



**Hình 5.16:** Sáu dạng dao động đầu tiên của vỏ cầu ngàm các cạnh

#### 5.4.4 Phân tích ổn định

##### 5.4.4.1 Tấm vuông 4 lớp $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn chịu nén đơn trục

Tấm vuông  $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$  tựa đơn được nghiên cứu ứng xử dưới tác dụng nén đơn trục trong mặt phẳng tấm như Hình 4.13 của chương 4. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 3, 10, 20, 30, 40$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ;  $G_{23} = 0.5E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ ,  $\rho = 1$ . Tỷ số  $a/h = 10$ .

**Bảng 5.10:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi  $a/h=10$ 

Mô hình	$E_1/E_2$				
	3	10	20	30	40
MISQ24 [5]	5.352	9.878	15.214	19.577	23.236
Liu và cộng sự [120]	5.401	9.985	15.374	19.537	23.154
Reddy và cộng sự [116]	5.114	9.774	15.298	19.957	23.340
Khdeir và cộng sự [107]	5.442	10.026	15.418	19.813	23.489
Noor [121]	5.294	9.762	15.019	19.304	22.881
SQ4C	5.357	9.899	15.268	19.668	23.366

Lực tới hạn chuẩn hóa  $P^* = N_x a^2 / (E_2 h^3)$  được xác định trên cơ sở lưới chia 16 x 16 phần tử SQ4C và được so sánh với các kết quả khác như trình bày cụ thể trong mục 4.4.3.1 của chương 4 theo [5, 107, 108, 116, 120-122]. Có thể nhắc lại ngắn gọn như sau: tác giả Nguyen-Van dựa trên 256 phần tử tứ giác 4 nút tron MISQ24, nhóm tác giả Liu và cộng sự sử dụng phương pháp không lưới với tổng cộng 441 nút rời rạc cho toàn miền, nhóm tác giả Reddy và cộng sự hoặc nhóm tác giả Khdeir và cộng sự với nghiệm giải tích dựa vào lý thuyết biến dạng cắt bậc cao HSDT hay kết quả nghiệm đàn hồi 3D của tác giả Noor. Bảng 5.10 mô tả kết quả so sánh khi thay đổi tỷ số  $E_1/E_2$ . Bên cạnh đó, khi thay đổi tỷ số  $a/h$  đồng thời lấy giá trị tỷ số  $E_1/E_2 = 40$  cũng có kết quả so sánh như ở Bảng 5.11.

**Bảng 5.11:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi  $E_1/E_2=40$ 

Mô hình	$a/h$			
	10	20	50	100
MISQ24 [5]	23.236	31.747	35.561	36.190
FSDT(a) [122]	23.409	31.625	35.254	35.851
FSDT(b) [123]	23.471	31.707	35.356	35.955
HSDT [116]	23.349	31.637	35.419	35.971
SQ4C	23.366	31.727	35.485	36.105

#### 5.4.4.2 Vỏ trụ 5 lớp $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ tựa đơn chịu tải nén đơn trục

Một vỏ trụ panel  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  tựa đơn trên bốn cạnh chịu tải nén đơn trục tiếp tục được xem xét ở đây như Hình 4.14 ở chương 4. Đặc trưng vật liệu  $E_1/E_2 = 40$ ;  $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$ ;  $G_{23} = 0.5E_2$ ;  $\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = 0.25$ ,  $\rho = 1$ . Tỷ số hình học  $a/b = 1$  và  $R/a = 20$ . Ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  lên giá trị lực tới hạn chuẩn hóa  $P^* = N_x a^2 / (E_2 h^3)$  được phân tích trên cơ sở lưới chia 16 x 16 phần tử SQ4C và tất cả kết quả được trình bày kết hợp so sánh với các kết quả khác trích xuất từ các tài liệu [5, 124-126] như đã giới thiệu cụ thể ở mục 4.4.3.2 và ở Bảng 5.12. Có thể nhắc lại ngắn gọn như sau: tác giả Nguyen-Van sử

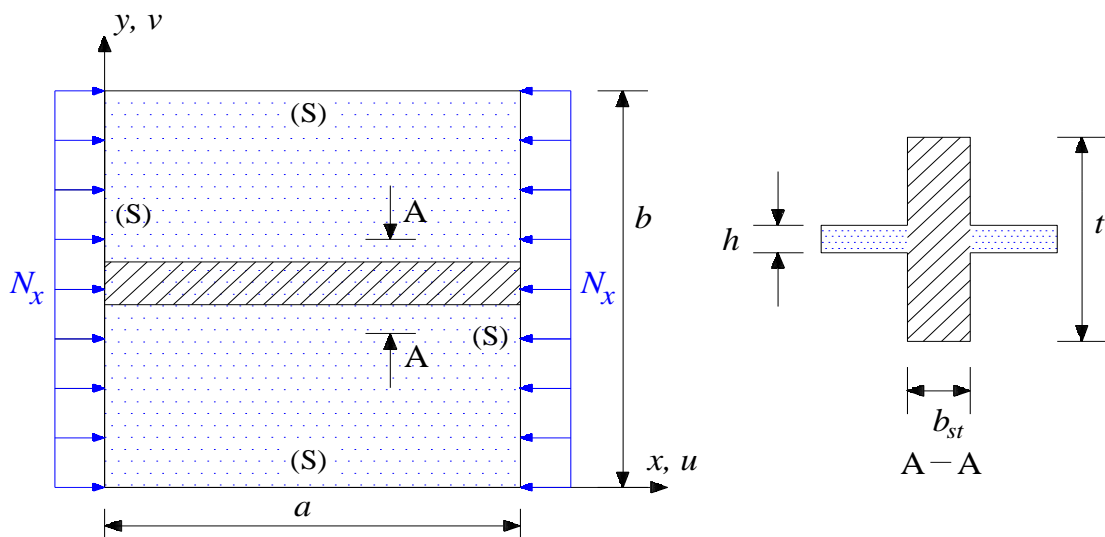
dùng 256 phần tử tứ giác 4 nút bậc thấp MISQ24, tác giả Kumar và cộng sự sử dụng 100 phần tử vỏ cong 8 nút đẳng tham số, tác giả Prusty và cộng sự cũng sử dụng 64 phần tử vỏ cong 8 nút khác và cuối cùng tác giả Sciuva cung cấp nghiệm giải tích trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT.

**Bảng 5.12:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi tỷ số  $a/h$

Mô hình	$a/h$				
	10	20	30	50	100
MISQ24 [5]	23.97	31.91	34.08	35.33	35.89
Kumar [124]	23.97	31.79	-	35.40	36.85
Prusty [125]	23.96	31.89	33.98	36.84	35.39
Sciuva [126]	24.19	31.91	34.04	35.42	36.86
SQ4C	24.10	31.96	34.12	35.35	35.90

5.4.4.3 Hệ kết cấu tâm & sườn ngang gia cường, vật liệu đẳng hướng và chịu tải nén đơn trục

Tấm tựa đơn được gia cường sườn ngang đồng thời chịu tải nén đơn trục như Hình 5.17. Các hệ số được sử dụng trong quá trình phân tích  $\beta = a/b$ ;  $\gamma = EI_{st}/bD$ ,  $\delta = A_{st}/ab$ ,  $I_{st} = b_{st}t^3/12$ ,  $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$  và  $A_{st} = b_{st}t$ . Kết quả lực tới hạn chuẩn hóa  $P^* = N_x a^2 / (E_2 h^3)$  từ phần tử SQ4C dựa trên lưới chia 16 x 16 được đưa ra so sánh với kết quả giải tích của nhóm tác giả Timoshenko và cộng sự [64] như Bảng 5.13.



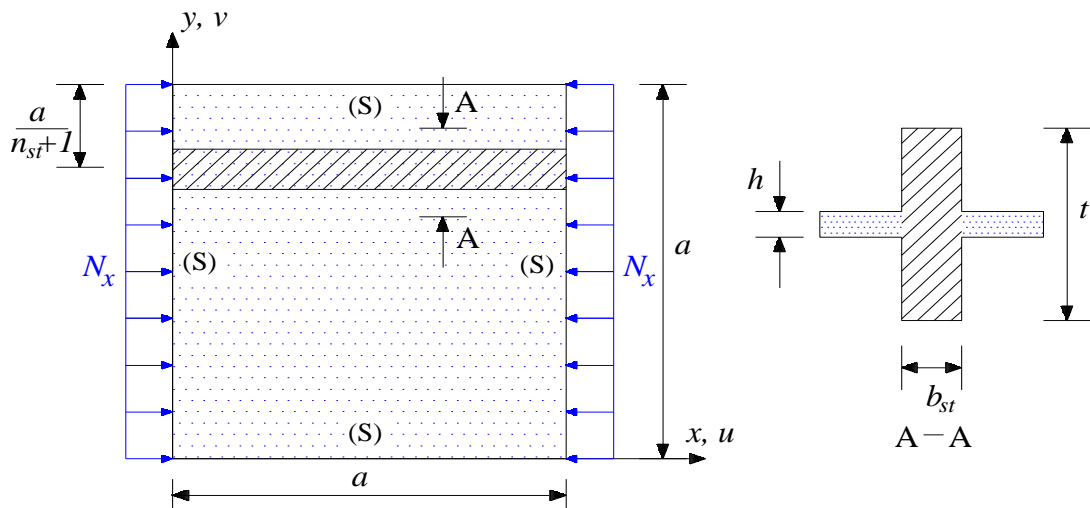
**Hình 5.17:** Tấm vuông tựa đơn gia cường sườn ngang chịu nén đơn trục

**Bảng 5.13:** So sánh lực tới hạn chuẩn hóa khi thay đổi giá trị  $\gamma$ ,  $\beta$  và  $\delta$

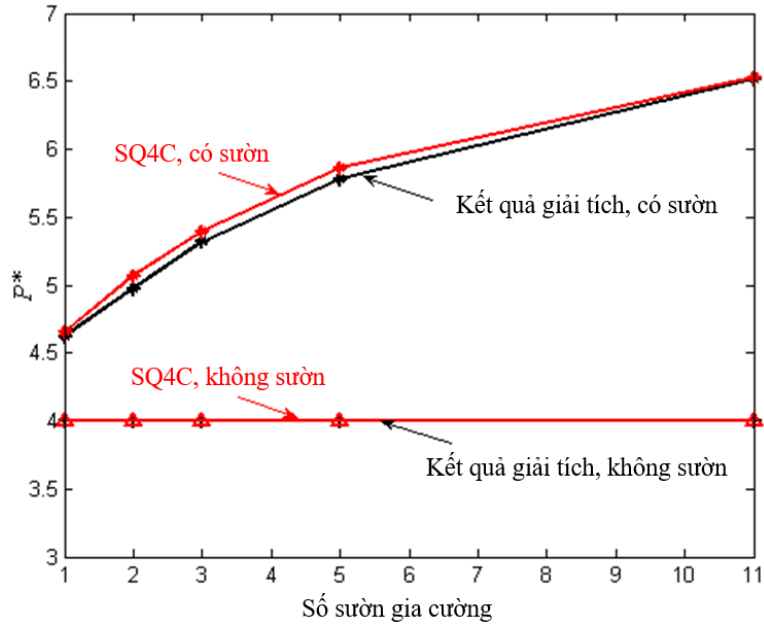
$\gamma = 5$ ; $\delta = 0.05$	Timoshenko và cộng sự [64]	SQ4C
$\beta = 1$	12.0	11.2
$\beta = 2$	8.2	8.7
$\gamma = 10$ ; $\delta = 0.05$	Timoshenko và cộng sự [64]	SQ4C
$\beta = 1$	16.0	15.9
$\beta = 2$	10.3	11.4
$\gamma = 15$ ; $\delta = 0.05$	Timoshenko và cộng sự [64]	SQ4C
$\beta = 1$	16.0	15.9
$\beta = 2$	12.5	13.6
$\gamma = 20$ ; $\delta = 0.05$	Timoshenko và cộng sự [64]	SQ4C
$\beta = 1$	16.0	15.9
$\beta = 2$	14.7	14.5

5.4.4.4 Hệ kết cấu tấm vuông &  $n_{st}$  sườn ngang gia cường, vật liệu đẳng hướng và chịu tải nén đơn trục

Khảo sát tấm vuông tựa đơn được gia cường  $n_{st}$  sườn ngang cách đều với  $n_{st} = 1, 2, 3, 5$  và  $11$  như Hình 5.18. Hệ số hình học  $\gamma = 0.4$  và  $\delta = 0.02$ . Các đặc trưng khác theo tài liệu [137]. Kết quả khảo sát về lực tới hạn được so sánh với các kết quả giải tích của tác giả Zhao như tham khảo trong [137] và được thể hiện ở Hình 5.19. Trong cả hai trường hợp có gia cường sườn hay không gia cường, kết quả thu được bởi phần tử SQ4C với lưới chia  $12 \times 12$  đều xấp xỉ với kết quả của Zhao.



**Hình 5.18:** Tấm vuông tựa đơn được gia cường  $n_{st}$  sườn ngang cách đều



**Hình 5.19:** Kết quả so sánh lực tối hạn

## 5.5 Kết luận

Phần tử SQ4C đã được thiết lập và sử dụng để phân tích tĩnh, dao động tự do và ổn định cho kết cấu dạng tấm/vỏ có hay không có sừn gia cường. Kết quả đạt được khi sử dụng phần tử SQ4C có thể chấp nhận được vì sai số không đáng kể giữa nó với các kết quả tham khảo đáng tin cậy khác. Phần tử SQ4C vốn dựa vào kỹ thuật trơn biến dạng trên miền con kết hợp kỹ thuật khử khóa cắt và khóa màng nên có thể áp dụng để phân tích các kết cấu phức tạp kể cả trong trường hợp chia lưới méo. Việc đánh giá sai số cụ thể hơn khi áp dụng phần tử SQ4C được tiến hành ở chương cuối của luận án này.



---

## Chương 6

# PHẦN TỬ SQ4P

### 6.1 Giới thiệu

Trong chương này lần lượt trình bày công thức triển khai đa thức Chebyshev, xây dựng phần tử tứ giác SQ4P (*Sort...Q4...Chebyshev Polynomial*), kết quả tính toán số minh họa, so sánh và đánh giá. Cuối cùng là những kết luận thu được từ quá trình phân tích lời giải.

### 6.2 Đa thức Chebyshev

Đa thức Chebyshev loại 1, bậc  $p$  theo các tài liệu [31, 138, 139] được định nghĩa

$$T_p(x) = T_p(\cos \phi) = \cos p\phi \quad (6.1)$$

với  $-1 \leq x = \cos \phi \leq 1$  và

$$\cos(p+1)\phi = 2\cos\phi\cos p\phi - \cos(p-1)\phi \quad (6.2)$$

Từ các công thức (6.1) và (6.2)

$$T_{p+1}(x) = 2xT_p(x) - T_{p-1}(x), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (6.3)$$

Đa thức Chebyshev  $T_p(x)$  với  $p \geq 2$  có giá trị bằng 0 tại các điểm  $x_i$  như dưới đây

$$x_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p], \quad i = 1, 2, 3, \dots \Leftrightarrow T_p(x_i) = 0 \quad (6.4)$$

Ý tưởng quan trọng nhất liên quan đến quá trình xấp xỉ của một hàm chưa xác định  $f(x)$  dựa vào đa thức nội suy Lagrangian  $Y(x)$  thông qua những điểm đã biết  $(x_k, f(x_k))$  liên quan đến đa thức Chebyshev như mô tả sau

$$f(x) \approx Y(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_i T_i(x) \quad \text{và} \quad f(x_k) = Y(x_k) \quad (6.5)$$

Trên đoạn  $[-1, 1]$ , đa thức Chebyshev có đặc tính trực giao nên các hệ số chưa biết  $a_i$  có thể được tính bằng

$$a_i = \sum_{k=1}^p f(x_k) T_i(x_k) / \sum_{k=1}^p T_i^2(x_k) \quad (6.6)$$

Từ các công thức (6.5) và (6.6) suy ra

$$Y(x) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^{p-1} \left[ \frac{T_i(x_k) T_i(x)}{\sum_{j=1}^p T_i^2(x_j)} \right] f(x_k) \quad (6.7)$$

Đặt  $x = \cos(\pi/2p)\xi$ , công thức (6.7) trở thành

$$Y(\xi) = \sum_{k=1}^p N_k^{Che}(\xi) f(\xi_k) \quad (6.8)$$

Hàm dạng 1D là  $N_k^{Che}(\xi)$  được định nghĩa

$$N_k^{Che}(\xi) = \sum_{i=0}^{p-1} \left[ \frac{T_i(\cos(\pi/2p)\xi_k) T_i(\cos(\pi/2p)\xi)}{\sum_{j=1}^p T_i^2(\cos(\pi/2p)\xi_j)} \right] \quad (6.9)$$

với

$$\xi_i = -\cos[(2i-1)\pi/2p] / \cos(\pi/2p), \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (6.10)$$

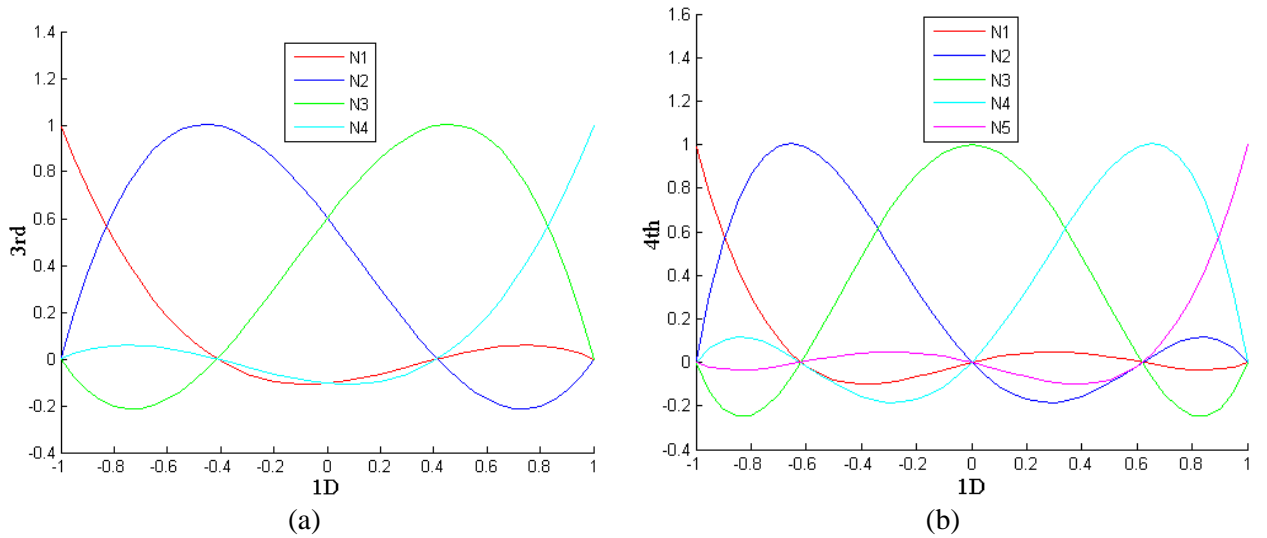
Trong không gian 2D

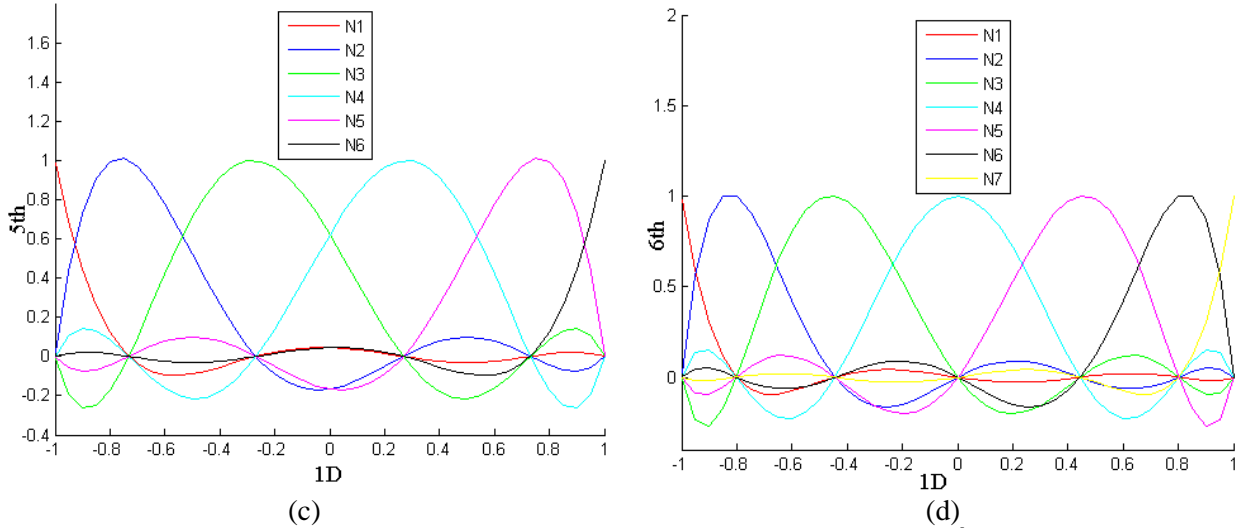
$$(\xi, \eta) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (6.11)$$

Hàm dạng liên quan đến nút  $I(\xi_i, \eta_j)$  trong không gian này được thiết lập hoàn toàn tương tự

$$N_i^{Che}(\xi, \eta) = N_i^{Che}(\xi) N_j^{Che}(\eta) \quad (6.12)$$

trong đó  $N_i^{Che}(\xi)$  là hàm dạng 1D bậc  $p_1$  ứng với tập  $\xi \in [-1, 1]$  và  $N_j^{Che}(\eta)$  là hàm dạng 1D bậc  $p_2$  ứng với tập  $\eta \in [-1, 1]$ . Hình 6.1 đề cập đến các hàm dạng 1D bậc 3, 4, 5 và 6 liên quan đến đa thức Chebyshev.

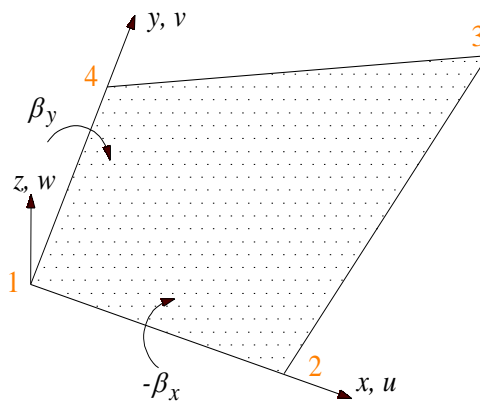




**Hình 6.1:** Hàm dạng 1D a) bậc 3, b) bậc 4, c) bậc 5 và bậc 6) liên quan đến đa thức Chebyshev

### 6.3 Xây dựng phần tử SQ4P

Công thức phần tử hữu hạn liên quan đến đa thức Chebyshev được thiết lập trong mục này dùng cho phân tích kết cấu tấm/vỏ. Mặt trung hòa của kết cấu được chia thành  $n_e$  phần tử tứ giác 4 nút với 5 bậc tự do cho mỗi nút như Hình 6.2.

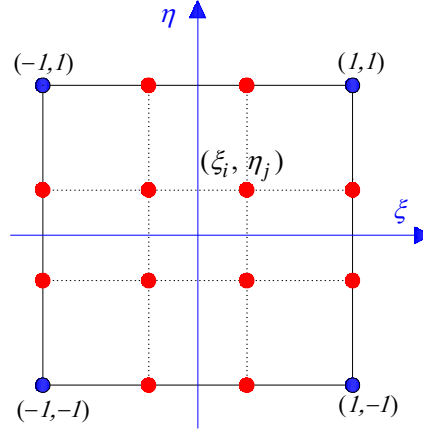


**Hình 6.2:** Chiều dương quy ước của các thành phần chuyển vị trong phần tử SQ4P

Trên cơ sở lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT, trường chuyển vị được trình bày

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= z\beta_y + u_0(x, y) \\
 v(x, y, z) &= -z\beta_x + v_0(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

với  $u_0, v_0, w_0$  là ba thành phần chuyển vị thẳng của một điểm nằm trên mặt trung hòa và  $\beta_x$  và  $\beta_y$  là các chuyển vị xoay quanh trục  $x$  và trục  $y$  như minh họa ở Hình 6.2.



● Nút thêm vào

**Hình 6.3:** Phần tử SQ4P trong hệ tọa độ tự nhiên tương ứng  $p_1=p_2=3$

Véc-tơ biến dạng trong mặt phẳng và véc-tơ biến dạng cắt ngang được thể hiện

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_m} + z \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_b} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + z\boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (6.14)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_y + w_{0,x} \\ -\beta_x + w_{0,y} \end{bmatrix}$$

Các công thức (4.13÷4.15) trong chương 4 tiếp tục được sử dụng cho chương này khi khảo sát vật liệu phân cấp chức năng. Cụ thể hơn, quan hệ ứng suất - biến dạng được mô tả

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

với các hằng số vật liệu

$$Q_{11} = Q_{22} = E(z)/[1 - \mu^2(z)], \quad Q_{12} = Q_{21} = \mu(z)E(z)/[1 - \mu^2(z)],$$

$$Q_{44} = Q_{55} = Q_{66} = E(z)/2[1 + \mu(z)] \quad (6.16)$$

Do đó các ma trận **A**, **B**, **D** và **C** được xác định như dưới đây

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} dz, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{C} = \int_{-h/2}^{h/2} k_s \begin{bmatrix} Q_{55} & 0 \\ 0 & Q_{44} \end{bmatrix} dz$$

Mặt khác, liên quan đến việc áp dụng đa thức Chebyshev, thành phần biến dạng màng của phần tử SQ4P được xác định thông qua 4 nút góc của phần tử và  $[(p_1+1)(p_2+1)-4]$  nút ảo được thêm vào tương tự Hình 6.3 và viết theo công thức sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.18)$$

trong đó

$$\mathbf{B}_m(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.19)$$

$$\mathbf{q}_e = \left[ u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \right]_{(i=1..(p_1+1)(p_2+1))}^T$$

Thành phần biến dạng uốn của phần tử xác định tương tự

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.20)$$

với

$$\mathbf{B}_b(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} \\ 0 & 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & N_{1,x}^{Che} & \dots & 0 & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} \end{bmatrix}_{3 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.21)$$

Biến dạng cắt ngang từ đó cũng được thiết lập

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{x}_C) = \mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) \mathbf{q}_e \quad (6.22)$$

với

$$\mathbf{B}_s(\mathbf{x}_C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{1,x}^{Che} & N_1^{Che} & 0 & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),x}^{Che} & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,y}^{Che} & 0 & N_1^{Che} & \dots & 0 & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1),y}^{Che} & 0 & N_{(p_1+1)(p_2+1)}^{Che} \end{bmatrix}_{2 \times 5 \times (p_1+1)(p_2+1)} \quad (6.23)$$

Ma trận độ cứng tổng của phần tử

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{A} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_m^T \mathbf{B} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{B} \mathbf{B}_m d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_b^T \mathbf{D} \mathbf{B}_b d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C} \mathbf{B}_s d\Omega \quad (6.24)$$

Véc-tơ lực nút phần tử

$$\mathbf{F} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^{Che})^T \mathbf{p} d\Omega \quad (6.25)$$

Ma trận khối lượng của phần tử



$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} (\mathbf{N}^{Che})^T \mathbf{m} (\mathbf{N}^{Che}) d\Omega$$

$$\mathbf{m}_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h^2/12 \end{bmatrix} dz, \quad i = 1..(p_1+1)(p_2+1) \quad (6.26)$$

Ma trận độ cứng hình học của phần tử

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{B}_g^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \mathbf{B}_g d\Omega \quad (6.27)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{0i} = \begin{bmatrix} h\sigma_o & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h\sigma_o & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h\sigma_o & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h^3}{12}\sigma_o \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{gi} = \begin{bmatrix} N_{i,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y}^{Che} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,x}^{Che} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y}^{Che} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x}^{Che} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y}^{Che} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,x}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y}^{Che} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x}^{Che} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y}^{Che} \end{bmatrix}, \quad i = 1..(p_1+1)(p_2+1) \quad (6.28)$$

Đối với kết cấu dạng vỏ, thành phần chuyển vị xoay trong mặt phẳng phần tử được thêm vào các ma trận địa phương của phần tử. Các giá trị ảo của độ cứng tương ứng với thành phần chuyển vị xoay này được gán các giá trị xấp xỉ, thường là  $10^{-3}$  lần giá trị lớn nhất trên đường chéo chính của ma trận độ cứng phần tử. Trong phạm vi luận án này, luật cầu phương Gauss đủ được thực hiện nên số điểm Gauss sử dụng cho mỗi phần tử là  $(p_1+1)(p_2+1)$  và tổng số bậc tự do tương ứng cho mỗi phần tử là  $5(p_1+1)(p_2+1)$ , hiển nhiên là  $6(p_1+1)(p_2+1)$  cho vỏ.



## 6.4 Kết quả số

### 6.4.1 Kiểm chứng

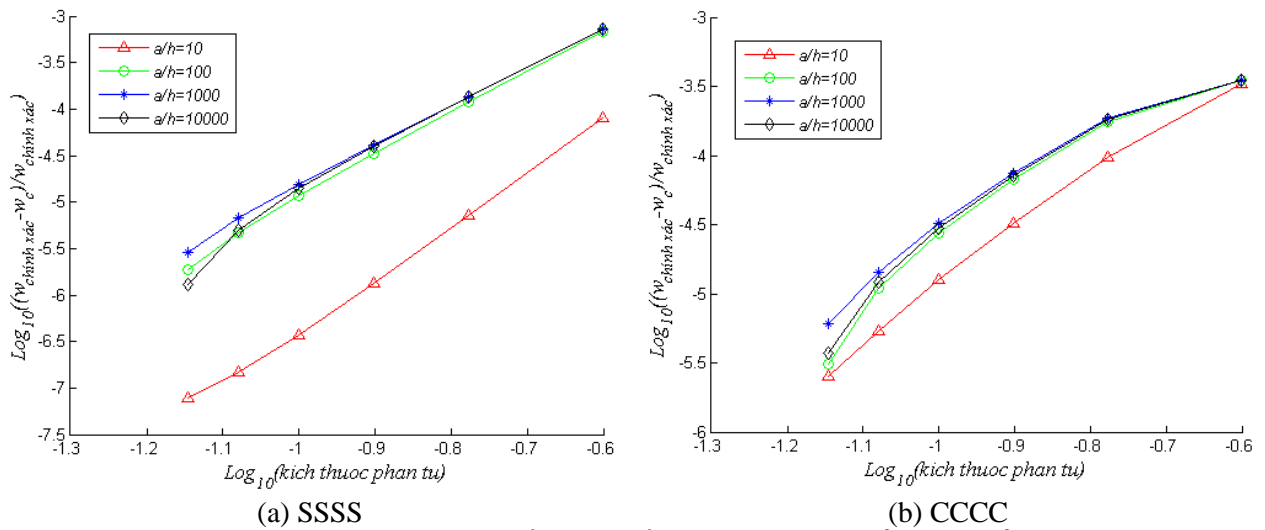
#### 6.4.1.1 Tấm vuông đẳng hướng chịu tải phân bố đều

Khảo sát tấm vuông liên kết tựa đơn (SSSS) và liên kết ngàm (CCCC) đẳng hướng chịu tải phân bố đều  $q$ . Hằng số mô đun Young  $E = 1.092$  MPa và hệ số Poisson  $\mu = 0.3$ . Độ võng ngay chính giữa tấm được chuẩn hóa theo công thức  $w^* = (100Eh^3w_{central}) / [12qa^4(1-\mu^2)]$ . Bảng 6.1 thể hiện giá trị độ võng chuẩn hóa khi thay đổi bậc  $p_1$  và  $p_2$ .

**Bảng 6.1:** Khảo sát độ võng chuẩn hóa chính giữa tấm vuông khi thay đổi bậc  $p_1$  &  $p_2$

		CCCC, $a/h = 100$			
$p_1 = p_2$	8x8	12x12	16x16	20x20	
1	0.0037	0.0078	0.0132	0.0195	
2	0.1205	0.1243	0.1255	0.1261	
3	0.1267	0.1267	0.1267	0.1267	
4	0.1267	0.1267	0.1267	0.1267	
5	0.1267	0.1267	0.1267	0.1267	
		SSSS, $a/h = 100$			
$p_1 = p_2$	8x8	12x12	16x16	20x20	
1	0.0173	0.0369	0.0613	0.0883	
2	0.4047	0.4058	0.4061	0.4063	
3	0.4064	0.4064	0.4064	0.4064	
4	0.4064	0.4064	0.4064	0.4064	
5	0.4064	0.4064	0.4064	0.4064	
		CCCC, $a/h = 10$			
$p_1 = p_2$	8x8	12x12	16x16	20x20	
1	0.1152	0.1322	0.1395	0.1433	
2	0.1499	0.1503	0.1504	0.1504	
3	0.1504	0.1504	0.1504	0.1504	
4	0.1504	0.1504	0.1504	0.1504	
5	0.1504	0.1504	0.1504	0.1504	
		SSSS, $a/h = 10$			
$p_1 = p_2$	8x8	12x12	16x16	20x20	
1	0.3509	0.3896	0.4052	0.4129	
2	0.4271	0.4272	0.4273	0.4273	
3	0.4273	0.4273	0.4273	0.4273	
4	0.4273	0.4273	0.4273	0.4273	
5	0.4273	0.4273	0.4273	0.4273	

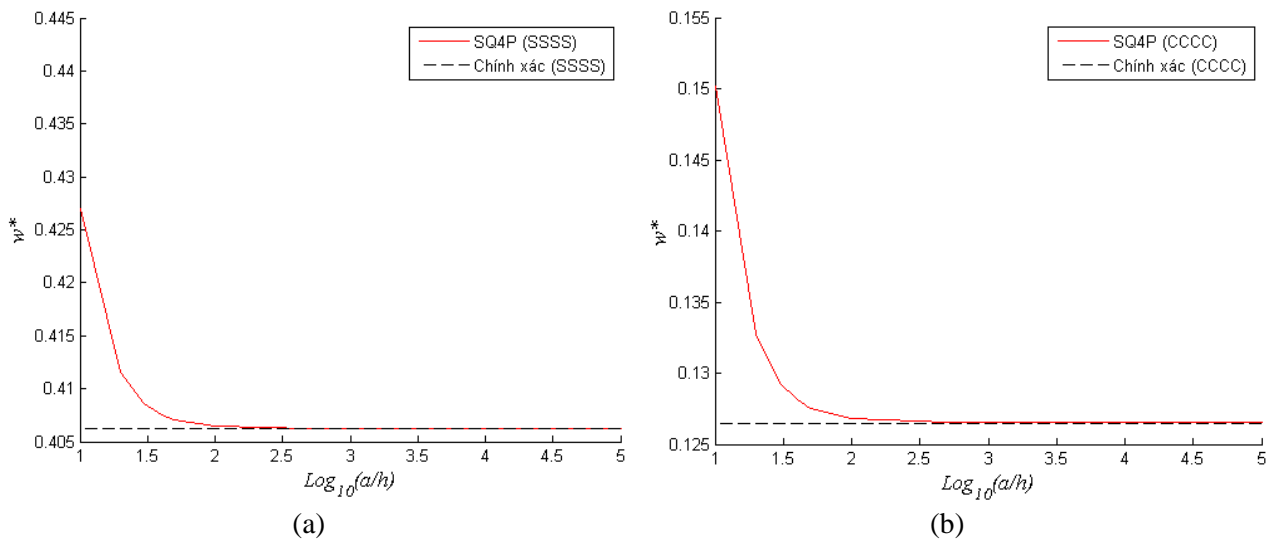
Dựa vào Bảng 6.1, chọn  $p_1 = p_2 = 3$  cho các phân tích tiếp theo. Trên cơ sở thay đổi tỷ số giữa chiều dài với chiều dày tấm  $a/h = 10, 100, 1000$  và  $10000$ , tốc độ hội tụ của kết quả được thể hiện thông qua Hình 6.4a và Hình 6.4b.



**Hình 6.4:** Đường cong hội tụ của chuyển vị chuẩn hóa ngay giữa tám liên kết a) tựa đơn và b) ngàm

**Bảng 6.2:** Độ võng chuẩn hóa chính giữa tám vuông với cả hai trường hợp liên kết tựa đơn và ngàm

		CCCC				
$w^*$		$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 1000$	$a/h = 10000$	$a/h = 100000$
			0.150461	0.126781	0.126530	0.126527
		SSSS				
		$a/h = 10$	$a/h = 100$	$a/h = 1000$	$a/h = 10000$	$a/h = 100000$
		0.427284	0.406451	0.406244	0.406242	0.406234



**Hình 6.5:** Sự hội tụ của chuyển vị chuẩn hóa ngay giữa tám liên kết a) tựa đơn và b) ngàm ứng với giá trị  $a/h$  biến đổi từ 10 đến 100000

Bên cạnh đó, Bảng 6.2, Hình 6.5a và Hình 6.5b cũng trình bày sự hội tụ của độ võng chuẩn hóa chính giữa tám vuông giữa kết quả thu được bởi phần tử SQ4P khi chia lưới

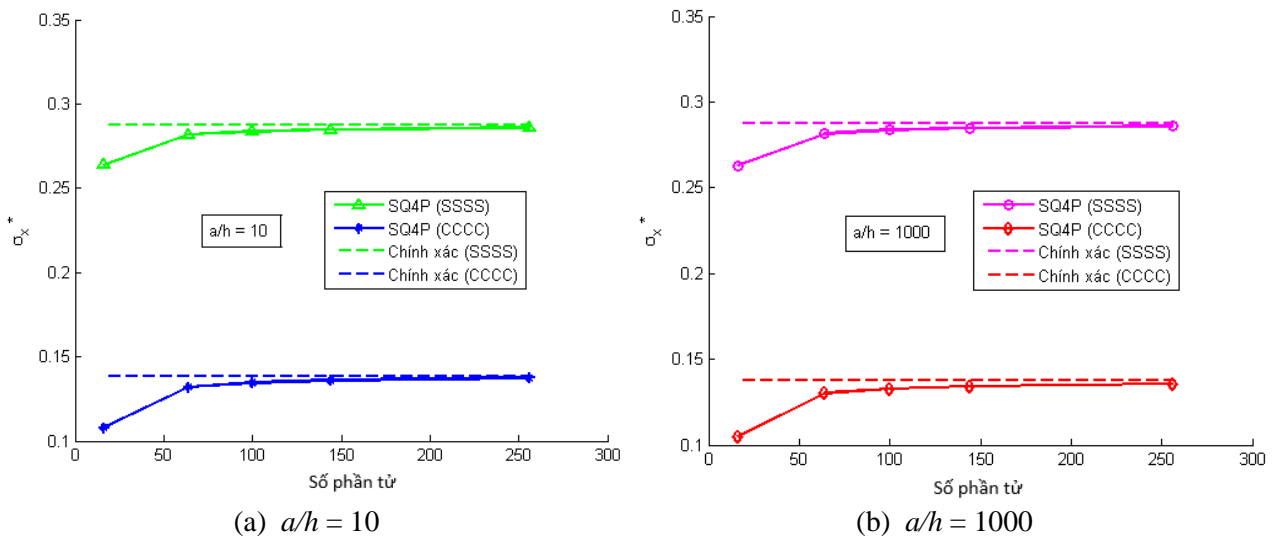


10 x 10 và nghiệm chính xác trích xuất từ [140] của tác giả Taylor và cộng sự trên cơ sở khảo sát sự thay đổi tỷ số  $a/h$  từ 10 đến 100000 đối với cả hai trường hợp liên kết tựa đơn và ngàm.

Ngoài ra, ứng suất chuẩn hóa  $\sigma_x^* = \sigma_x h^2 / (q_0 a^2)$  tại điểm  $(a/2, a/2, h/2)$  của tấm cũng được tính toán dựa vào phần tử SQ4P và được so sánh với nghiệm chính xác được trích xuất từ các tài liệu [16, 140] của tác giả Nguyen-Thoi và cộng sự hoặc tác giả Taylor và cộng sự như trình bày ở Bảng 6.3 và Hình 6.6.

**Bảng 6.3:** So sánh ứng suất chuẩn hóa  $\sigma_x^*$  tại điểm  $(a/2, a/2, h/2)$  của tấm

$a/h$	Chia lưới					Chính xác [16, 140]
	4 x 4	8 x 8	10 x 10	12 x 12	16 x 16	
CCCC						
10	0.10780	0.13196	0.13461	0.13603	0.13743	0.13860
1000	0.10510	0.13015	0.13283	0.13426	0.13566	0.13746
SSSS						
10	0.26382	0.28174	0.28377	0.28486	0.28594	0.28734
1000	0.26290	0.28156	0.28366	0.28479	0.28590	0.28734

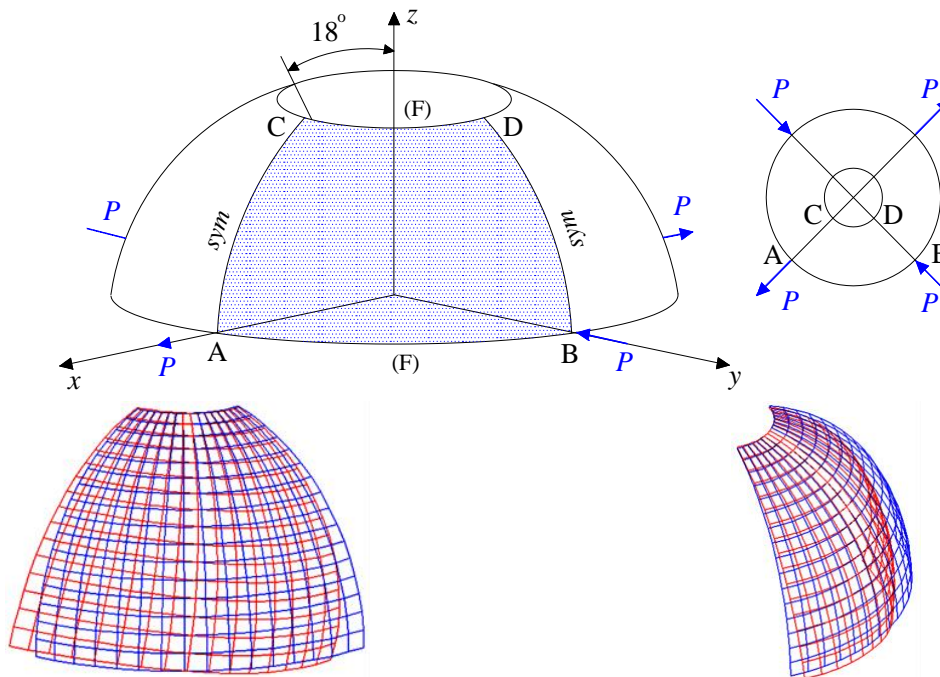


**Hình 6.6:** Sự hội tụ của ứng suất chuẩn hóa  $\sigma_x^*$  tại điểm  $(a/2, a/2, h/2)$  của tấm ứng với  $a/h = 10$  và 1000

#### 6.4.1.2 Vỏ bán cầu đẳng hướng có khoét lỗ $18^\circ$ chịu lực tập trung

Vỏ bán cầu có khoét lỗ được phân tích tiếp theo với các thông số hình học, lực tập trung  $P = 2$  cũng như vị trí đặt lực như Hình 6.7. Cụ thể thêm  $R = 10$ , chiều dày vỏ  $h = 0.04$ , mô đun Young  $E = 6.825 \times 10^7$ , hệ số Poisson  $\mu = 0.3$ . Bảng 6.4 trình bày các kết quả chuyển vị hướng tâm tại nút A thông qua phần tử SQ4P với các lưới chia 8 x 8, 12 x

12, 16 x 16 và 20 x 20. Kết quả thu được hội tụ đến kết quả mô phỏng bởi phần mềm Ansys dựa trên phân tử vỏ 4 nút *Shell63* với bậc tự do xoay trong mặt phẳng phân tử.



**Hình 6.7:** Vỏ bán cầu có khoét lỗ 18° và biến dạng sau khi chịu lực

**Bảng 6.4:** Giá trị chuyển vị hướng tâm tại điểm A (m) của vỏ bán cầu có khoét lỗ

Chia lưới	SQ4P	Ansys
8x8	0.06573	0.09400
12x12	0.08579	(10000 elements)
16x16	0.09137	61206 dofs)
20x20 (22326 dofs)	0.09385	

#### 6.4.1.3 Nửa vỏ yên ngựa đẳng hướng chịu lực tập trung

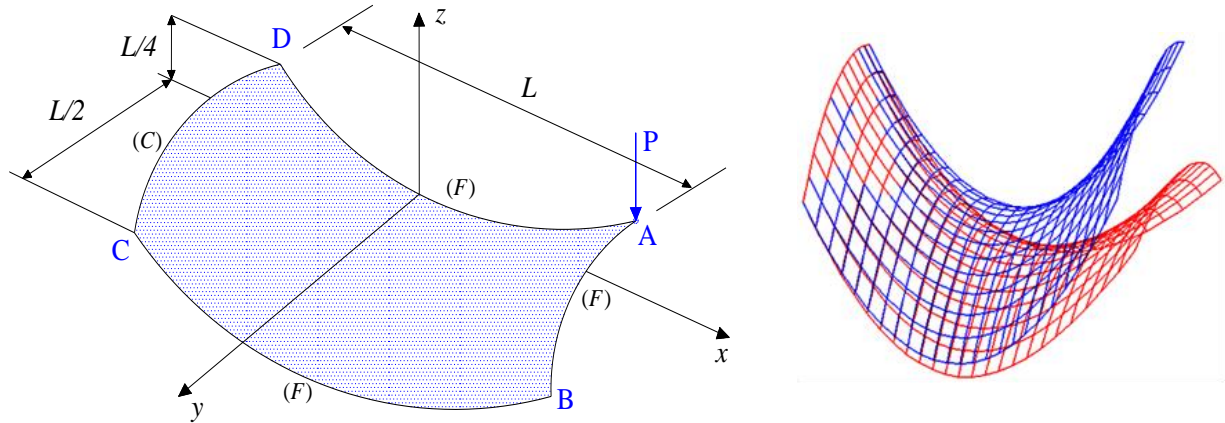
Tiếp theo kết cấu một nửa vỏ yên ngựa chịu liên kết và tải trọng như Hình 6.8. Phương trình biểu diễn dạng hình học cho vỏ này

$$z = x^2 - y^2, \quad x \in \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right], \quad y \in \left[0, \frac{L}{2}\right] \quad (5.40)$$

Một vài thông số khác được giới thiệu như chiều dài  $L = 1$ , chiều dày vỏ  $h = 0.001$ , mô đun Young  $E = 2 \times 10^{11}$ , hệ số Poisson  $\mu = 0.3$  và giá trị tải trọng  $P = 1$ .

Tương tự vỏ bán cầu khoét lỗ 18° ở trên, Bảng 6.5 trình bày các kết quả chuyển vị đứng tại điểm A thông qua phân tử SQ4P với các lưới chia 12 x 6, 16 x 8, 20 x 10 và 24 x 12. Kết quả thu được hội tụ đến kết quả thu được khi mô phỏng bằng phần mềm Ansys dựa

trên phần tử vỏ 4 nút *Shell63*. Tổng số bậc tự do của phần tử SQ4P ứng với lưới chia 24 x 12 là 16206 dofs trong khi của Ansys với phần tử *Shell63* là 60066 dofs như Bảng 6.5.



**Hình 6.8:** Kết cấu nửa vỏ yên ngựa và biến dạng sau khi chịu lực

**Bảng 6.5:** Giá trị chuyển vị đứng tại điểm A (m) của vỏ nửa yên ngựa

Chia lưới	SQ4P	Ansys
12x6	0.00649	0.01049
16x8	0.00862	(9800 elements)
20x10	0.00981	(60066 dofs)
24x12 (16206 dofs)	0.01037	

#### 6.4.2 Phân tích uốn tĩnh

Tấm vuông tựa đơn (SSSS) FGP gia cường bởi GPLs và chịu tải phân bố hình sin được xem xét trong mục này. Kích thước hình học của tấm  $a = b = 1$  m, độ dày  $h = 0.05$  m. Đặc trưng vật liệu trình bày trong Bảng 6.6. Cụ thể, tải trọng phân bố theo quy luật  $q = q_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b)$  với  $q_0 = 10^5$  Pa. Độ võng chính giữa tấm được chuẩn hóa theo công thức  $w^* = w_{central} / h$ . Kết quả thu được của phần tử SQ4P với lưới chia 6 x 6 trên toàn miền cho thấy sự xấp xỉ với kết quả tham khảo đưa ra bởi tác giả Nguyen-Xuan và cộng sự [79] dựa vào 648 phần tử đa giác cho vật liệu tổ hợp (GPL-S & P-S) như thể hiện trong Bảng 6.7.

**Bảng 6.6:** Đặc trưng vật liệu FGP-GPLs

$E_m = 130$ GPa	$E_{GPL} = 1.01$ TPa
$\mu_m = 0.34$	$\mu_{GPL} = 0.186$
$\rho_m = 8960$ kg/m <sup>3</sup>	$\rho_{GPL} = 1062.5$ kg/m <sup>3</sup>
$l_{GPL} = 2.5$ $\mu$ m, $w_{GPL} = 1.5$ $\mu$ m,	$t_{GPL} = 1.5$ nm

Thay đổi vật liệu tổ hợp từ (P-S & GPL-S) sang các tổ hợp khác như (P-S & GPL-A), (P-S & GPL-U), (P-A & GPL-S), (P-A & GPL-A) và (P-A & GPL-U), kết quả độ võng chuẩn hóa ứng với các giá trị khác nhau của hệ số xấp  $e_0$  cũng như của  $WF_{(GPL)}$  (wt.%) được trình bày ở Bảng 6.8.

**Bảng 6.7:** Giá trị  $w^*$  của tấm FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) ứng với tổ hợp GPL-S & P-S

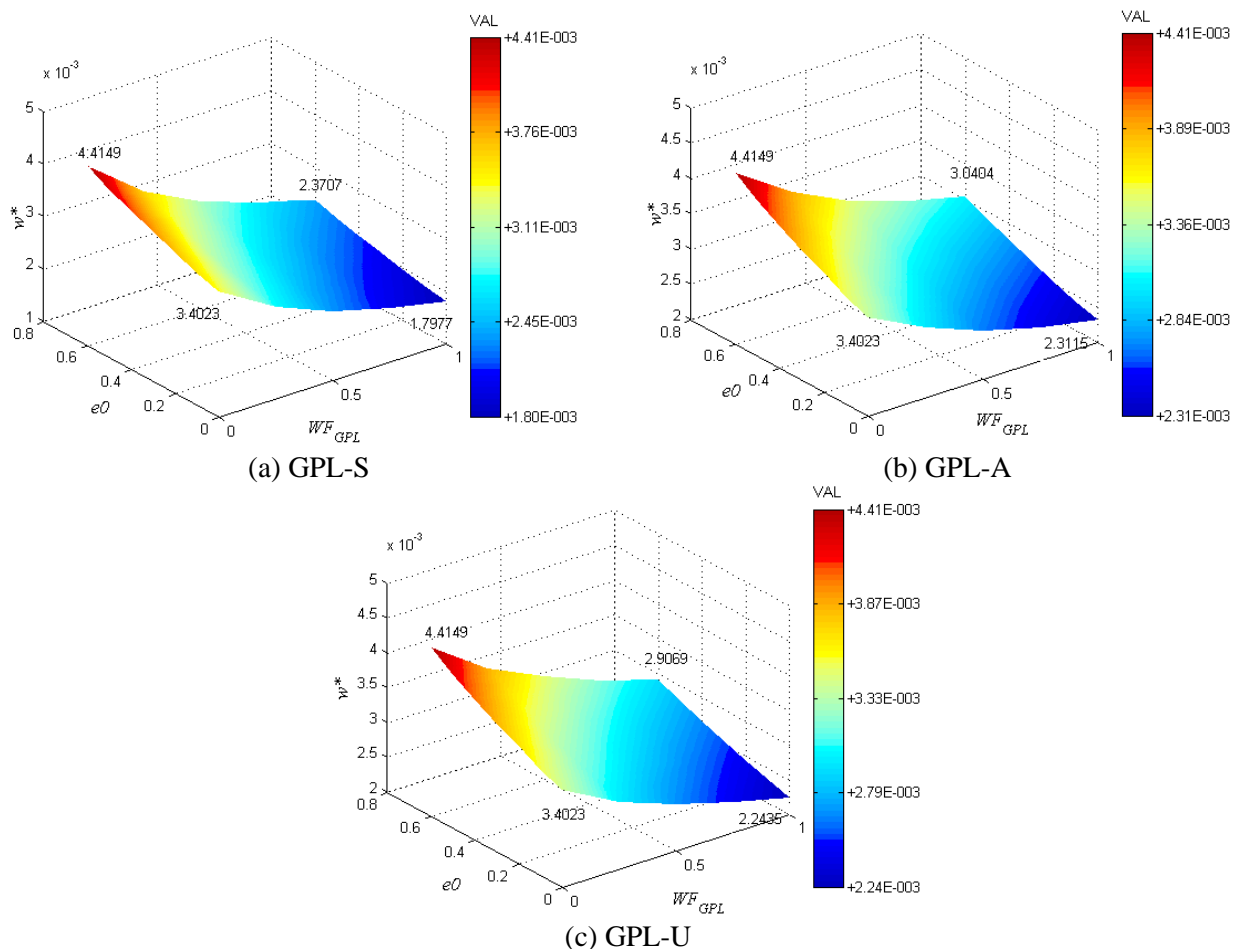
		P-S & GPL-S						
$WF_{(GPL)}$ (wt.%)		$e_0 = 0.0$	$e_0 = 0.1$	$e_0 = 0.2$	$e_0 = 0.3$	$e_0 = 0.4$	$e_0 = 0.5$	$e_0 = 0.6$
1.0	[79]	1.7983	-	1.9537	-	2.1413	-	2.3767
	SQ4P	1.7977	1.8717	1.9523	2.0406	2.1383	2.2474	2.3707
0.75	[79]	-	-	-	-	-	-	-
	SQ4P	2.0205	2.1035	2.1938	2.2926	2.4016	2.5228	2.6592
0.5	[79]	-	-	-	-	-	-	-
	SQ4P	2.3206	2.4158	2.5190	2.6317	2.7554	2.8923	3.0455
0.25	[79]	-	-	-	-	-	-	-
	SQ4P	2.7473	2.8595	2.9808	3.1125	3.2564	3.4146	3.5900
0.0	[79]	3.3979	-	3.6841	-	4.0181	-	4.4149
	SQ4P	3.4023	3.5400	3.6882	3.8481	4.0212	4.2094	4.4149

**Bảng 6.8:** Giá trị  $w^*$  của tấm FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) ứng với nhiều loại tổ hợp

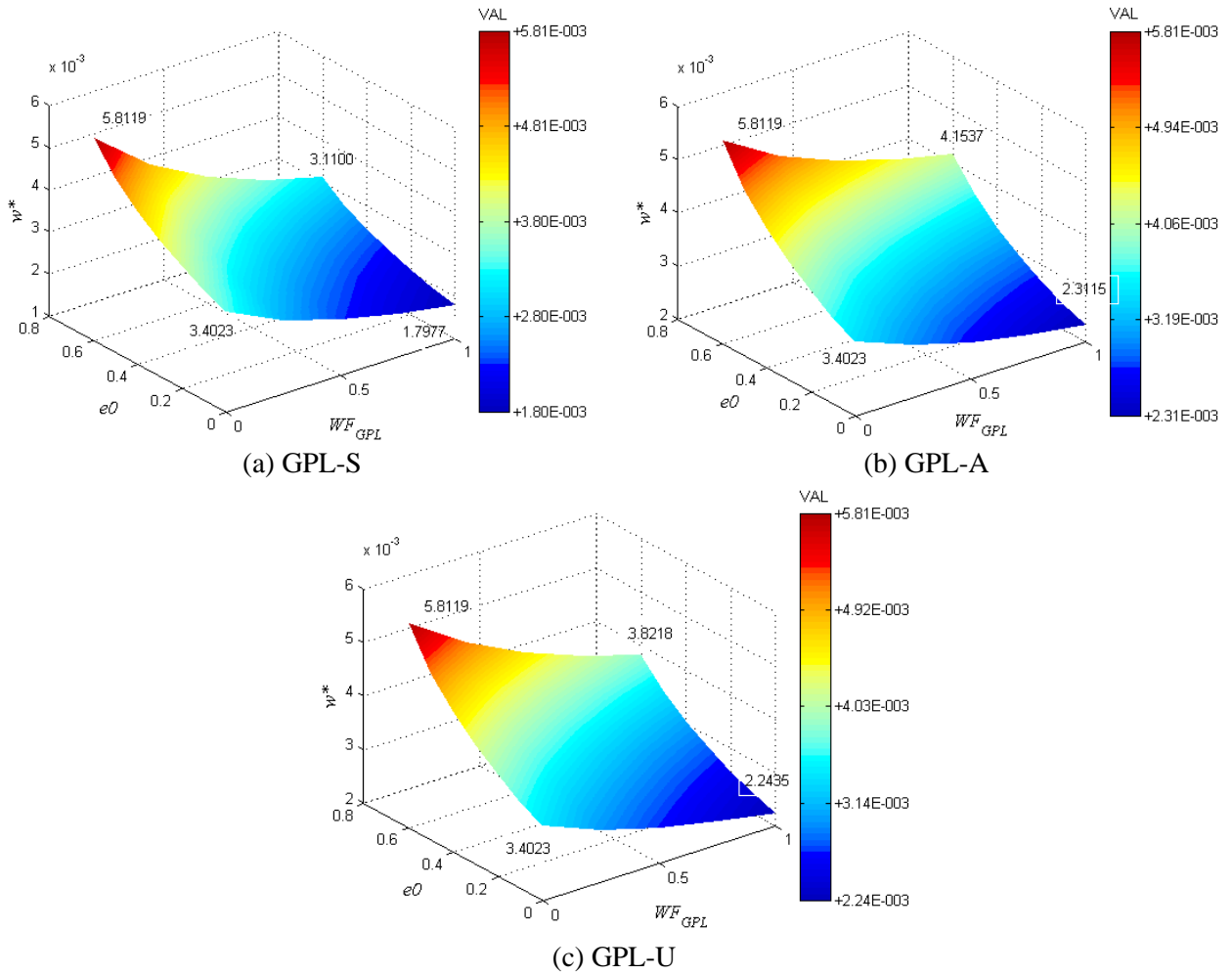
		P-S & GPL-A						
$WF_{(GPL)}$ (wt.%)		$e_0 = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0		2.3115	2.4080	2.5126	2.6264	2.7510	2.8882	3.0404
0.75		2.4716	2.5736	2.6839	2.8037	2.9344	3.0779	3.2365
0.5		2.6803	2.7897	2.9078	3.0358	3.1750	3.3273	3.4950
0.25		2.9923	3.1132	3.2432	3.3836	3.5356	3.7008	3.8813
0.0		3.4023	3.5400	3.6882	3.8481	4.0212	4.2094	4.4149
		P-S & GPL-U						
$WF_{(GPL)}$ (wt.%)		$e_0 = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0		2.2435	2.3336	2.4306	2.5353	2.6488	2.7721	2.9069
0.75		2.4390	2.5372	2.6428	2.7568	2.8803	3.0146	3.1613
0.5		2.6720	2.7802	2.9065	3.0321	3.1681	3.3160	3.4775
0.25		2.9685	3.0887	3.2183	3.3583	3.5102	3.6758	3.8573
0.0		3.4023	3.5400	3.6882	3.8481	4.0212	4.2094	4.4149
		P-A & GPL-S						
$WF_{(GPL)}$ (wt.%)		$e_0 = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0		1.7977	1.9173	2.0592	2.2313	2.4466	2.7263	3.1100
0.75		2.0205	2.1552	2.3148	2.5081	2.7492	3.0618	3.4890
0.5		2.3206	2.4758	2.6591	2.8806	3.1563	3.5126	3.9975
0.25		2.7473	2.9314	3.1483	3.4097	3.7339	4.1512	4.7162
0.0		3.4023	3.6305	3.8988	4.2209	4.6185	5.1274	5.8119
		P-A & GPL-A						
$WF_{(GPL)}$ (wt.%)		$e_0 = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0		2.3115	2.4814	2.6830	2.9273	3.2315	3.6238	4.1537
0.75		2.4716	2.6509	2.8635	3.1209	3.4411	3.8538	4.4113
0.5		2.6803	2.8714	3.0977	3.3711	3.7109	4.1483	4.7388

0.25	2.9923	3.1926	3.4281	3.7131	4.0776	4.5459	5.1775
0.0	3.4023	3.6305	3.8988	4.2209	4.6185	5.1274	5.8119
P-A & GPL-U							
$WF_{(GPL)} (wt.%)$	$e_0 = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
1.0	2.2435	2.3929	2.5685	2.7794	3.0399	3.3733	3.8218
0.75	2.4390	2.6017	2.7929	3.0226	3.3061	3.6692	4.1575
0.5	2.6720	2.8612	3.0719	3.3248	3.6372	4.0370	4.5748
0.25	2.9685	3.1751	3.4190	3.7108	4.0599	4.5067	5.1077
0.0	3.4023	3.6305	3.8988	4.2209	4.6185	5.1274	5.8119

Hình 6.9 và Hình 6.10 mô tả ảnh hưởng của phần trọng lượng GPL và hệ số xoắn  $e_0$  lên độ võng chuẩn hóa tại điểm chính giữa của tấm vuông FGP-GPLs cho hai nhóm vật liệu tổ hợp (P-S & GPL-S, P-S & GPL-A, P-S & GPL -U) và (P-A & GPL-S, P-A & GPL-A, P-A & GPL-U) tương ứng. Có thể thấy rằng độ võng này tăng dần khi tăng hệ số xoắn  $e_0$ . Nhận xét trên có thể được diễn giải bởi sự xuất hiện của các lỗ rỗng bên trong kết cấu với mật độ cao hơn và kích thước lớn hơn dẫn đến giảm độ cứng của tấm.



**Hình 6.9:** Ảnh hưởng của  $e_0$  và  $WF_{(GPL)} (wt.%)$  lên độ võng của tấm FGP-GPLs với phân bố P-S



**Hình 6.10:** Ảnh hưởng của  $e_0$  và  $WF_{(GPL)}$  (wt.%) lên độ võng của tấm FGP-GPLs với phân bố P-A

### 6.4.3 Phân tích dao động tự do

Tấm vuông FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) hoặc ngàm (CCCC) với chiều dày  $h$  và chiều dài  $a = b$  được xem xét. Đặc trưng vật liệu cho tấm như ở Bảng 6.6. Tần số dao động được chuẩn hóa bởi công thức  $\omega^* = \omega_{vib} a \sqrt{\rho_m (1 - \mu_m^2) / E_m}$ . Bảng 6.9 trình bày ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 của tấm FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) hoặc ngàm (CCCC) với  $WF_{(GPL)} = 1.0wt.%$  và  $e_0 = 0.5$ . Kết quả thu được dựa trên lưới chia  $6 \times 6$  phần tử SQ4P xấp xỉ tốt với các kết quả tham khảo khác từ phương pháp IGA kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến [141] với 225 điểm điều khiển đến phương pháp Ritz của nhóm tác giả Yang và cộng sự [142] dựa trên số lượng  $8 \times 8$  đa thức Chebyshev sử dụng trong hàm thử 2D.

Ảnh hưởng của hệ số xếp  $e_0$  lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 cũng được tính toán và thể hiện ở Bảng 6.10.

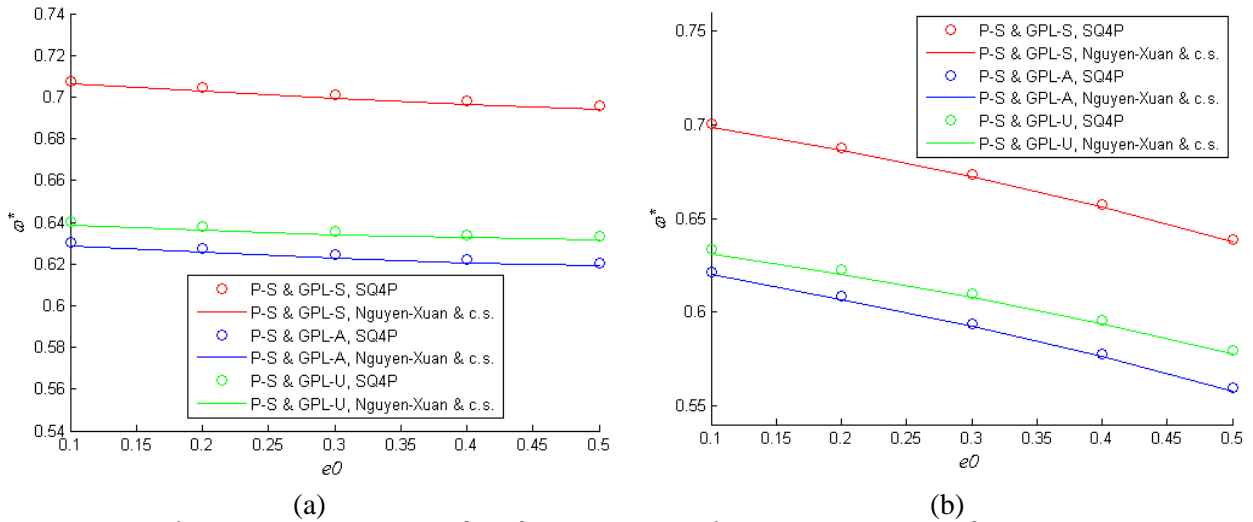
**Bảng 6.9:** So sánh tần số dao động chuẩn hóa mode 1 cho tấm FGP-GPLs

$a/h$		P-S			P-A			
		GPL-S	GPL-A	GPL-U	GPL-S	GPL-A	GPL-U	
CCCC	20	[141]	0.6940	0.6191	0.6318	0.6394	0.5681	0.5767
		[142]	0.7022	-	0.6366	0.6456	-	0.5814
		SQ4P	0.7042	0.6241	0.6366	0.6420	0.5598	0.5795
	30	[141]	0.4767	0.4220	0.4307	0.4365	0.3854	0.3912
		[142]	0.4783	-	0.4324	0.4387	-	0.3938
		SQ4P	0.4796	0.4235	0.4323	0.4359	0.3786	0.3923
	40	[141]	0.3615	0.3191	0.3257	0.3302	0.2908	0.2953
		[142]	0.3616	-	0.3265	0.3313	-	0.2971
		SQ4P	0.3625	0.3197	0.3264	0.3291	0.2854	0.2959
50	[141]	0.2907	0.2562	0.2616	0.2653	0.2333	0.2369	
	[142]	0.2904	-	0.2620	0.2659	-	0.2383	
	SQ4P	0.2911	0.2566	0.2619	0.2641	0.2289	0.2373	
SSSS	20	[141]	0.3958	0.3497	0.3570	0.3620	0.3188	0.3238
		[142]	0.3958	-	0.3574	0.3627	-	0.3252
		SQ4P	0.3969	0.3506	0.3573	0.3680	0.3272	0.3296
	30	[141]	0.2663	0.2346	0.2396	0.2430	0.2136	0.2169
		[142]	0.2657	-	0.2397	0.2433	-	0.2179
		SQ4P	0.2664	0.2318	0.2396	0.2468	0.2160	0.2208
	40	[141]	0.2004	0.1764	0.1801	0.1827	0.1605	0.1629
		[142]	0.1997	-	0.1801	0.1828	-	0.1637
		SQ4P	0.2002	0.1717	0.1801	0.1855	0.1598	0.1659
50	[141]	0.1606	0.1413	0.1442	0.1463	0.1285	0.1304	
	[142]	0.1600	-	0.1442	0.1464	-	0.1311	
	SQ4P	0.1604	0.1355	0.1442	0.1485	0.1259	0.1328	

**Bảng 6.10:** Ảnh hưởng của  $e_0$  lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 của tấm vuông FGP-GPLs tựa đơn (SSSS) với  $WF_{(GPL)} = 1.0wt. \%$  và  $a/h = 20$

$e_0$		P-S			P-A			P-U		
		GPLS	GPLA	GPLU	GPLS	GPLA	GPLU	GPLS	GPLA	GPLU
0.1	[141]	0.7062	0.6286	0.6386	0.6986	0.6199	0.6312	0.6973	0.6205	0.6299
	SQ4P	0.7128	0.6315	0.6412	0.7047	0.6225	0.6335	0.7029	0.6227	0.6319
0.2	[141]	0.7028	0.6256	0.6361	0.6861	0.6068	0.6201	0.6840	0.6085	0.6177
	SQ4P	0.7100	0.6288	0.6390	0.6921	0.6094	0.6224	0.6892	0.6104	0.6194
0.3	[141]	0.6995	0.6229	0.6340	0.6721	0.5924	0.6077	0.6701	0.5959	0.6049
	SQ4P	0.7075	0.6266	0.6374	0.6778	0.5949	0.6099	0.6747	0.5974	0.6062
0.4	[141]	0.6966	0.6207	0.6325	0.6561	0.5763	0.5938	0.6553	0.5825	0.5913
	SQ4P	0.7055	0.6250	0.6365	0.6614	0.5786	0.5959	0.6593	0.5836	0.5922
0.5	[141]	0.6940	0.6191	0.6318	0.6372	0.5578	0.5777	0.6394	0.5681	0.5767
	SQ4P	0.7042	0.6241	0.6364	0.6420	0.5598	0.5795	0.6427	0.5688	0.5771

Hình 6.11a và Hình 6.11b chỉ ra sự hội tụ của kết quả dựa vào phần tử SQ4P và kết quả dựa vào IGA kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến của nhóm tác giả Nguyen-Xuan và cộng sự [141] cho mọi loại tổ hợp vật liệu.



**Hình 6.11:** Ảnh hưởng của  $e_0$  lên tần số dao động chuẩn hóa mode 1 của tấm FGP-GPLs với a) P-S và b) P-A

#### 6.4.4 Phân tích ổn định

##### 6.4.4.1 Khảo sát ảnh hưởng của tỷ số $a/h$ đến sự ổn định của tấm vuông FGP-GPLs dưới tác dụng tải đơn trục hay đa trục

Tấm vuông FGP-GPLs như mục 6.4.2 được xem xét lại ở đây. Lực tới hạn được chuẩn hóa bởi công thức  $P^* = P_{cr} (1 - \mu_m^2) / (hE_m)$ . Bảng 6.11 và Bảng 6.12 trình bày ảnh hưởng của tỷ số  $a/h$  lên giá trị chuẩn hóa này. Kết quả từ SQ4P với lưới chia 6 x 6 được so sánh với kết quả tham khảo dựa vào IGA và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến [141] dựa trên 15 x 15 điểm điều khiển cũng như kết quả tham khảo dựa vào phương pháp Ritz [142] dựa vào số lượng 8 x 8 đa thức Chebyshev sử dụng trong hàm thử 2D. Hình 6.12a và Hình 6.12b thể hiện sự xấp xỉ của kết quả từ SQ4P và xác lập độ tin cậy khi sử dụng phần tử SQ4P để phân tích kết cấu tấm/vỏ.

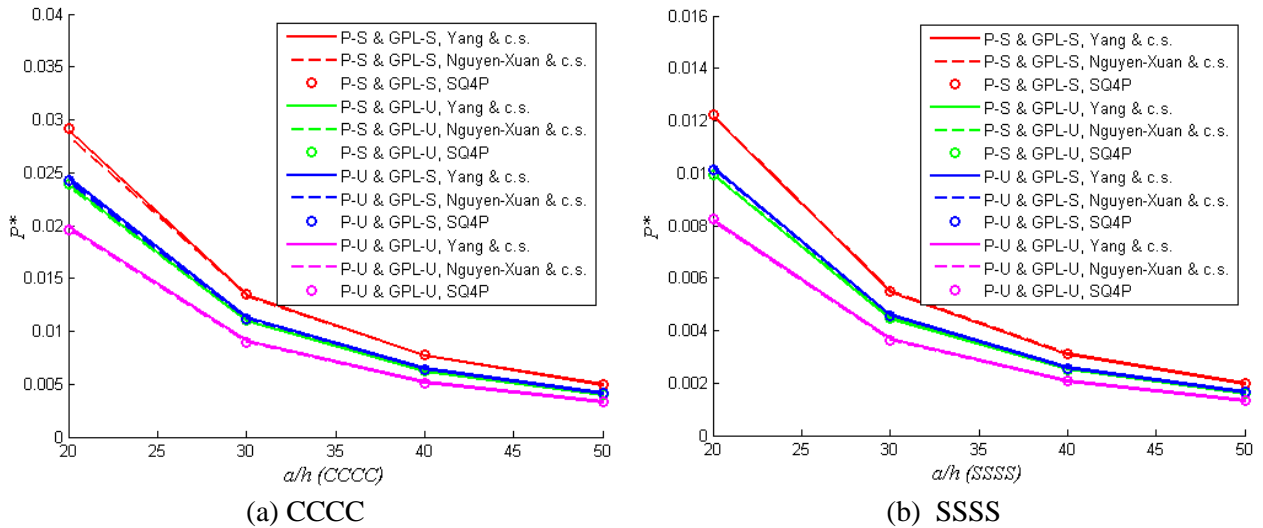


**Bảng 6.11:** Ảnh hưởng của  $a/h$  lên lực tới hạn đơn trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với  $WF_{(GPL)} = 1.0(\text{wt.}\%)$  và  $e_0 = 0.5$

$a/h$		P-S			P-U		
		GPL-S	GPL-A	GPL-U	GPL-S	GPL-A	GPL-U
CCCC							
20	[141]	0.02840	0.02274	0.02369	0.02414	0.01911	0.01970
	[142]	0.02899	-	0.02384	0.02452	-	0.01990
	SQ4P	0.02896	0.02275	0.02368	0.02431	0.01905	0.01961
30	[141]	0.01338	0.01051	0.01095	0.01121	0.00875	0.00901
	[142]	0.01343	-	0.01098	0.01130	-	0.00911
	SQ4P	0.01348	0.01055	0.01100	0.01121	0.00872	0.00898
40	[141]	0.00769	0.00600	0.00625	0.00640	0.00497	0.00512
	[142]	0.00767	-	0.00625	0.00644	-	0.00518
	SQ4P	0.00771	0.00601	0.00627	0.00639	0.00496	0.00511
50	[141]	0.00497	0.00386	0.00403	0.00413	0.00320	0.00330
	[142]	0.00494	-	0.00403	0.00415	-	0.00333
	SQ4P	0.00498	0.00387	0.00403	0.00411	0.00319	0.00328
SSSS							
20	[141]	0.01219	0.00952	0.00993	0.01017	0.00790	0.00814
	[142]	0.01217	-	0.00992	0.01022	-	0.00822
	SQ4P	0.01221	0.00910	0.00992	0.01012	0.00809	0.00827
30	[141]	0.00551	0.00428	0.00446	0.00457	0.00354	0.00364
	[142]	0.00547	-	0.00445	0.00459	-	0.00368
	SQ4P	0.00550	0.00424	0.00445	0.00454	0.00351	0.00362
40	[141]	0.00312	0.00242	0.00252	0.00258	0.00199	0.00206
	[142]	0.00309	-	0.00251	0.00259	-	0.00208
	SQ4P	0.00311	0.00246	0.00251	0.00256	0.00205	0.00209
50	[141]	0.00200	0.00155	0.00161	0.00166	0.00128	0.00132
	[142]	0.00198	-	0.00161	0.00166	-	0.00133
	SQ4P	0.00199	0.00157	0.00161	0.00164	0.00124	0.00131

**Bảng 6.12:** Ảnh hưởng của  $a/h$  lên lực tới hạn đa trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với  $WF_{(GPL)} = 1.0(\text{wt.}\%)$  và  $e_0 = 0.5$

$a/h$		P-S			P-A		
		GPL-S	GPL-A	GPL-U	GPL-S	GPL-A	GPL-U
CCCC							
20	[141]	0.01528	0.01216	0.01266	0.01285	0.00983	0.01055
	SQ4P	0.01548	0.01218	0.01269	0.01289	0.00976	0.01049
50	[141]	0.00263	0.00204	0.00212	0.00217	0.00163	0.00175
	SQ4P	0.00263	0.00204	0.00212	0.00216	0.00162	0.00175
SSSS							
20	[141]	0.00609	0.00476	0.00496	0.00506	0.00381	0.00409
	SQ4P	0.00612	0.00465	0.00496	0.00524	0.00401	0.00421
50	[141]	0.00100	0.00077	0.00081	0.00082	0.00062	0.00066
	SQ4P	0.00100	0.00078	0.00081	0.00085	0.00064	0.00068



**Hình 6.12:** So sánh lực tối hạn đơn trục chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với  $WF_{(GPL)} = 1.0(\text{wt.}\%)$  và  $e_0 = 0.5$

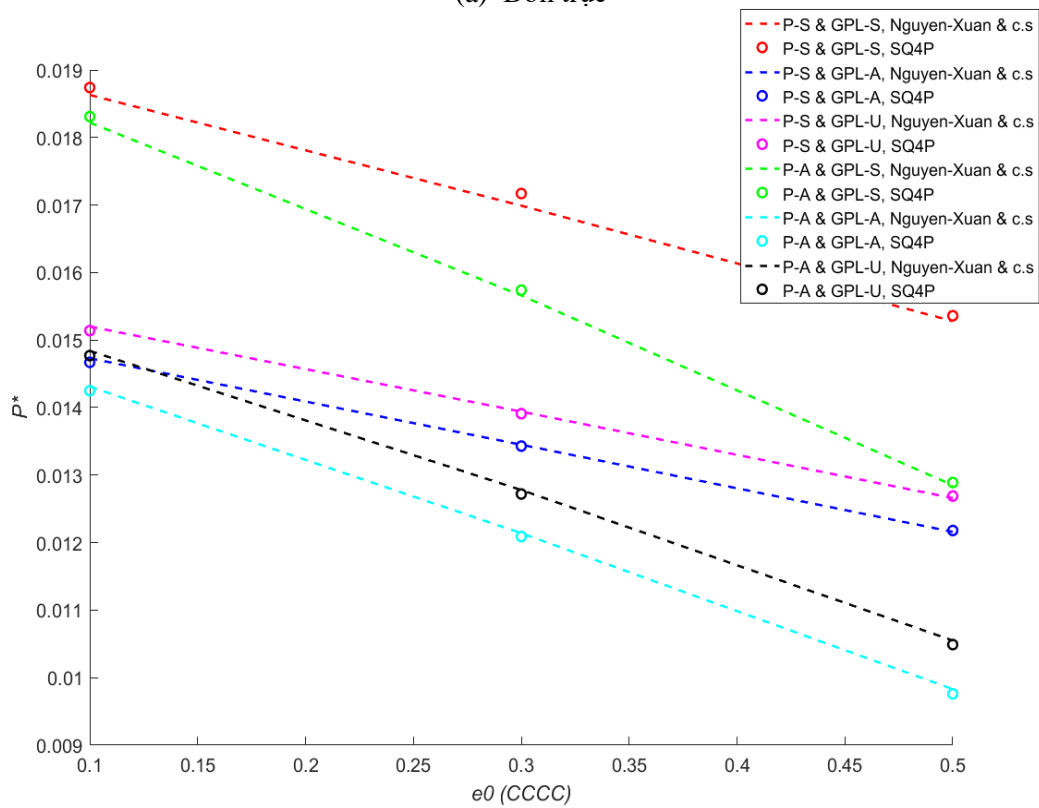
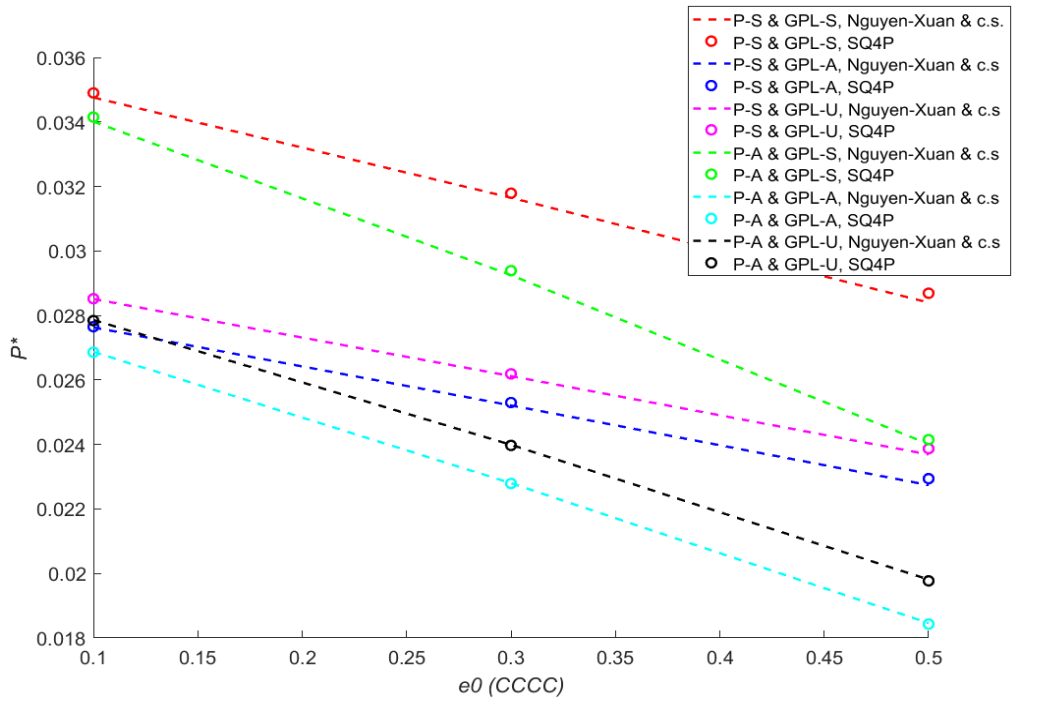
6.4.4.2 *Khảo sát ảnh hưởng của hệ số xếp  $e_0$  đến sự ổn định của tấm vuông FGP-GPLs dưới tác dụng tải đơn trục hay đa trục*

**Bảng 6.13:** Ảnh hưởng của  $e_0$  lên lực tối hạn chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với  $WF_{(GPL)} = 1.0(\text{wt.}\%)$  và  $a/h = 0.5$

$e_0$		P-S			P-A		
		GPL-S	GPL-A	GPL-U	GPL-S	GPL-A	GPL-U
Đơn trục, CCCC							
0.1	[141]	0.03476	0.02763	0.02851	0.03401	0.02687	0.02786
	SQ4P	0.03494	0.02765	0.02852	0.03441	0.02686	0.02784
0.3	[141]	0.03165	0.02521	0.02612	0.02925	0.02280	0.02399
	SQ4P	0.03198	0.02530	0.02619	0.02959	0.02279	0.02397
0.5	[141]	0.02840	0.02274	0.02369	0.02401	0.01846	0.01981
	SQ4P	0.02896	0.02275	0.02368	0.02424	0.01843	0.01977
Đa trục, CCCC							
0.1	[141]	0.01863	0.01473	0.01520	0.01822	0.01431	0.01484
	SQ4P	0.01874	0.01467	0.01514	0.01831	0.01425	0.01477
0.3	[141]	0.01699	0.01345	0.01394	0.01566	0.01214	0.01278
	SQ4P	0.01708	0.01343	0.01391	0.01574	0.01209	0.01272
0.5	[141]	0.01528	0.01216	0.01266	0.01285	0.00983	0.01055
	SQ4P	0.01548	0.01218	0.01269	0.01289	0.00976	0.01049

Khi xét đến ảnh hưởng của  $e_0$  lên lực tối hạn đơn trục hay đa trục chuẩn hóa cho tấm FGP-GPLs, Bảng 6.13 và Hình 6.13 cũng cho thấy sự hội tụ tốt giữa kết quả dựa vào SQ4P và kết quả tham khảo của nhóm tác giả Nguyen-Xuan và cộng sự [141] dựa vào IGA và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao ba biến. Lưu ý số lượng phần tử SQ4P và số

lượng điểm điều khiển trong tài liệu tham khảo giữ nguyên như mục 6.4.4.1 cho phân tích này.



**Hình 6.13:** So sánh lực tối hạn chuẩn hóa của tấm vuông FGP-GPLs với  $WF_{(GPL)} = 1.0(wt.%)$  và  $a/h = 0.5$

---

## 6.5 Kết luận

Phần tử SQ4P đã được thiết lập và sử dụng để phân tích tĩnh, dao động tự do và ổn định cho kết cấu dạng tấm/vỏ làm bằng vật liệu xốp phân cấp chức năng có gia cường tiêu cầu graphene. Kết quả đạt được khi sử dụng phần tử SQ4P là chấp nhận được vì sai số không đáng kể giữa nó với các kết quả tham khảo đáng tin cậy khác. Phần tử SQ4P vốn dựa vào đa thức Chebyshev với nhiều đặc tính chuyên biệt như có thể điều chỉnh bậc của đa thức để tăng độ chính xác của kết quả dù chia lưới thô. Phần tử này có thể tiếp tục được áp dụng để phân tích các kết cấu có hình dạng phức tạp hay phân tích tương tác đa trường vật lý thậm chí phân tích phi tuyến hình học hoặc phi tuyến vật liệu trong tương lai. Việc đánh giá sai số cụ thể hơn khi áp dụng phần tử SQ4P được tiến hành ở chương cuối của luận án này.

---

## Chương 7

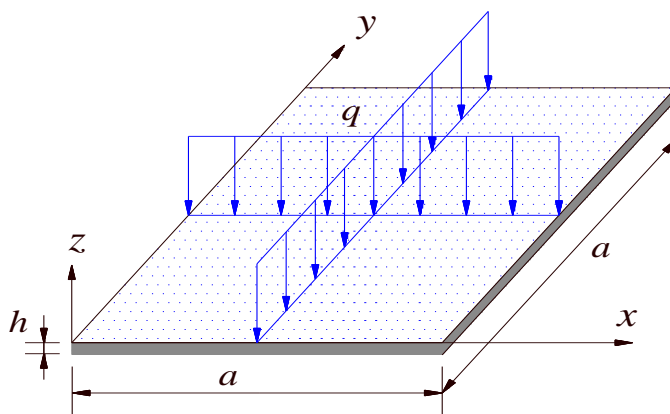
# ĐÁNH GIÁ SAI SỐ CHUNG GIỮA CÁC PHẦN TỬ

### 7.1 Giới thiệu

Trong chương cuối này, luận án trình bày đánh giá sai số chung cũng như so sánh thời gian tính toán giữa các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P để từ đó đưa ra những nhận xét về ưu khuyết điểm của từng phần tử và phạm vi áp dụng của chúng trong phân tích kết cấu dạng tấm/vỏ.

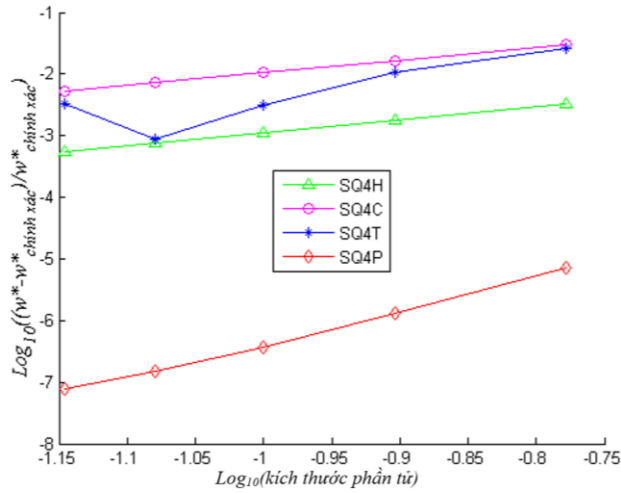
### 7.2 Tấm đẳng hướng chịu tải phân bố đều

Khảo sát tấm vuông như Hình 7.1 liên kết tựa đơn (SSSS) và liên kết ngàm (CCCC) dưới sự thay đổi tỷ số giữa chiều dài và chiều dày tấm  $a/h = 10, 100, 1000, 10000$ . Tấm chịu tải phân bố đều  $q$  với các đặc trưng vật liệu như hằng số mô đun Young  $E = 1.092$  MPa và hệ số Poisson  $\mu = 0.3$ . Độ võng ngay chính giữa tấm được xác định theo công thức  $w^* = (100Eh^3w_c)/[12qa^4(1-\mu^2)]$ . Tiến hành so sánh sai số kết quả phân tích độ võng khi sử dụng bốn phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P. Nghiệm chính xác được tham khảo từ tài liệu [140] của tác giả Taylor và cộng sự.

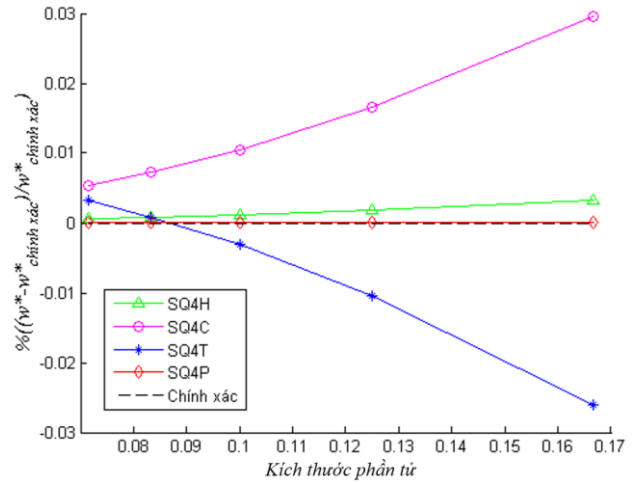


**Hình 7.1:** Tấm vuông chịu tải phân bố đều

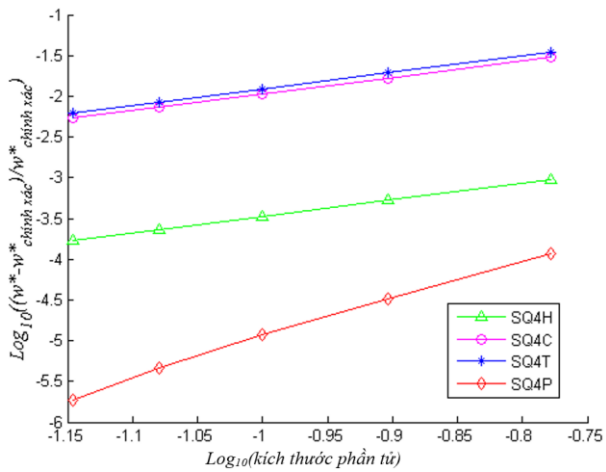
Các Hình 7.2a-h thể hiện đồ thị so sánh sai số theo  $\log_{10}$  và theo % với các lưới chia 6 x 6, 8 x 8, 10 x 10, 12 x 12 và 14 x 14 ứng với trường hợp liên kết tựa đơn (SSSS) và tỷ số  $a/h = 10, 100, 1000$  và 10000.



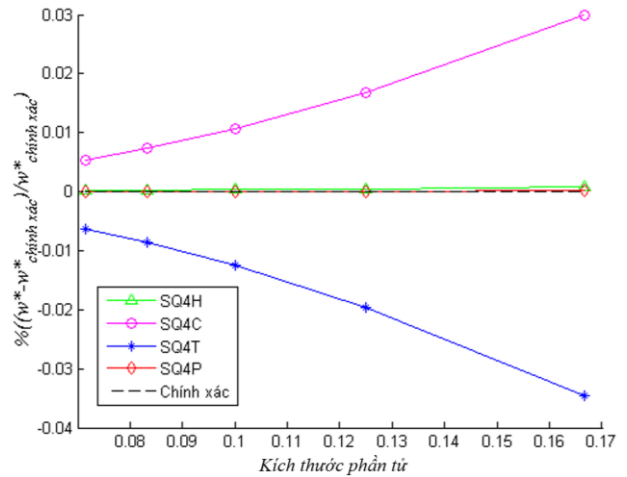
(a)  $a/h = 10$ , SSSS



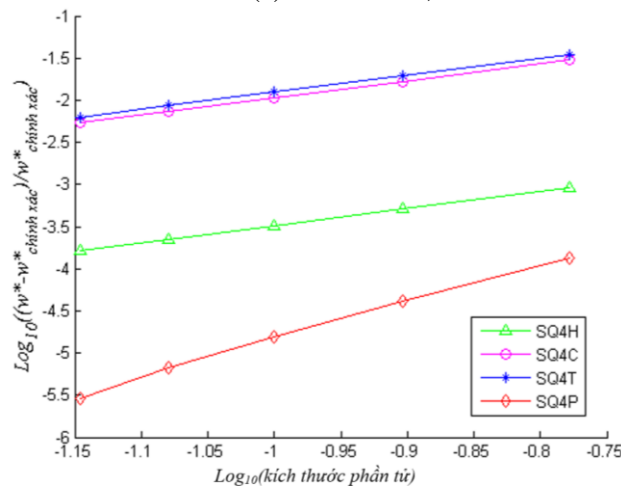
(b)  $a/h = 10$ , SSSS



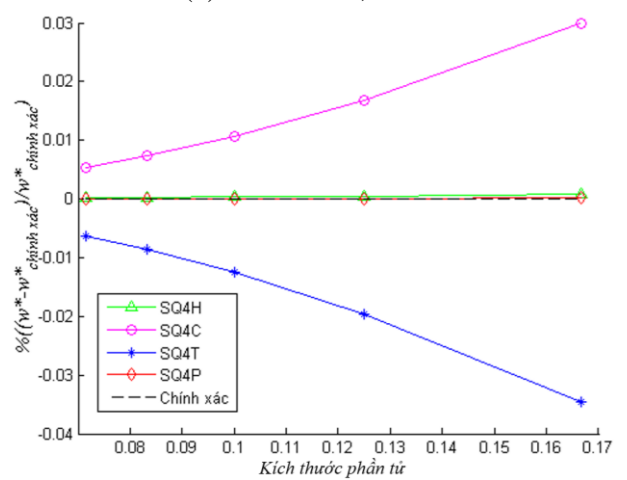
(c)  $a/h = 100$ , SSSS



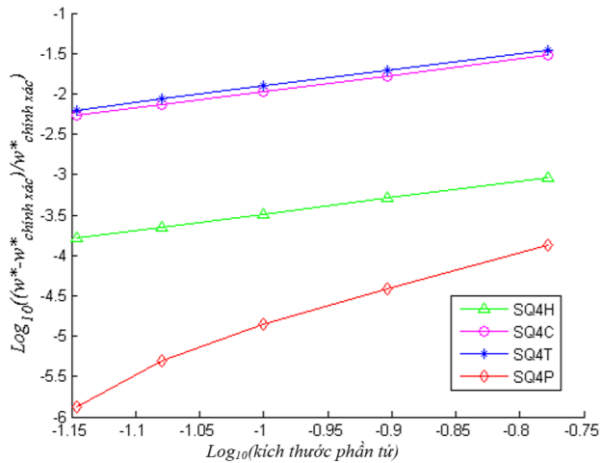
(d)  $a/h = 100$ , SSSS



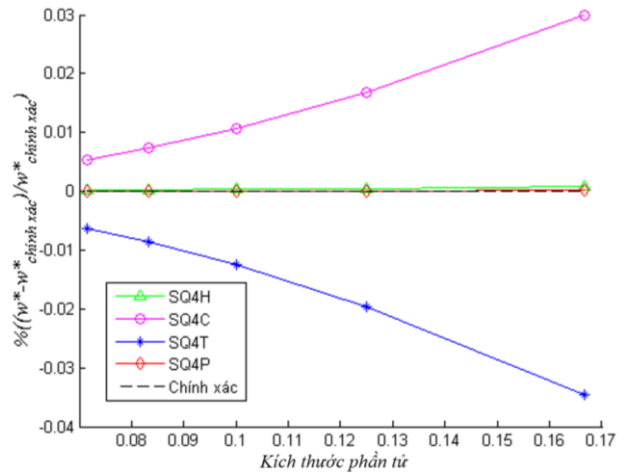
(e)  $a/h = 1000$ , SSSS



(f)  $a/h = 1000$ , SSSS

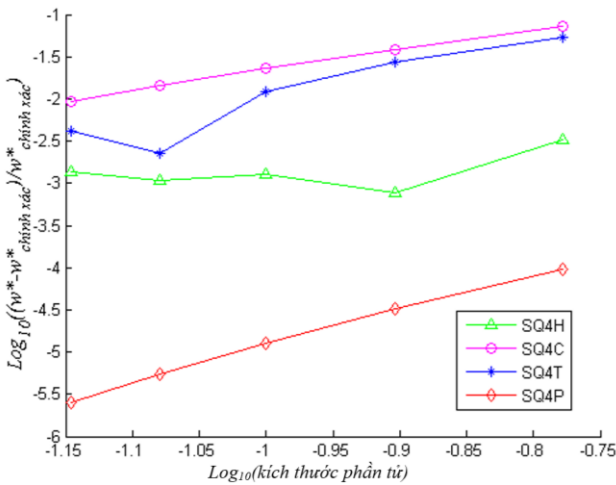


(g)  $a/h = 10000$ , SSSS

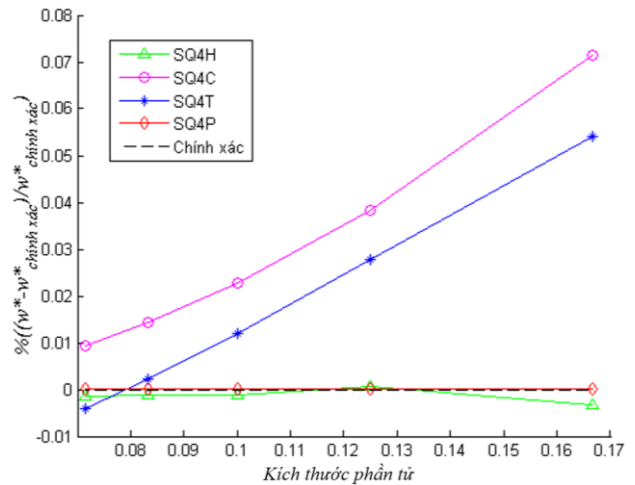


(h)  $a/h = 10000$ , SSSS

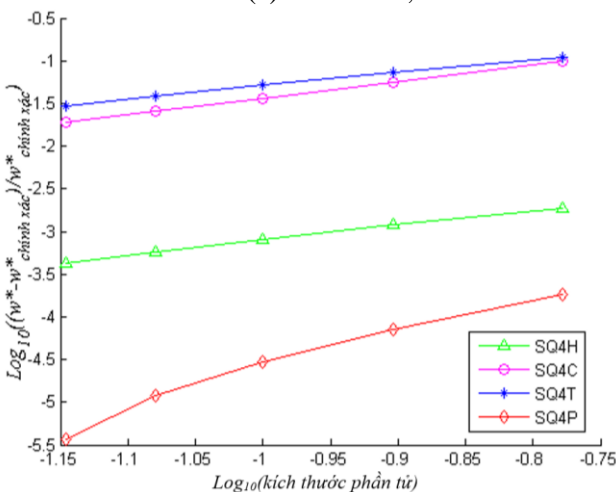
**Hình 7.2:** So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết tựa đơn với  $a/h = 10, 100, 1000$  và  $10000$



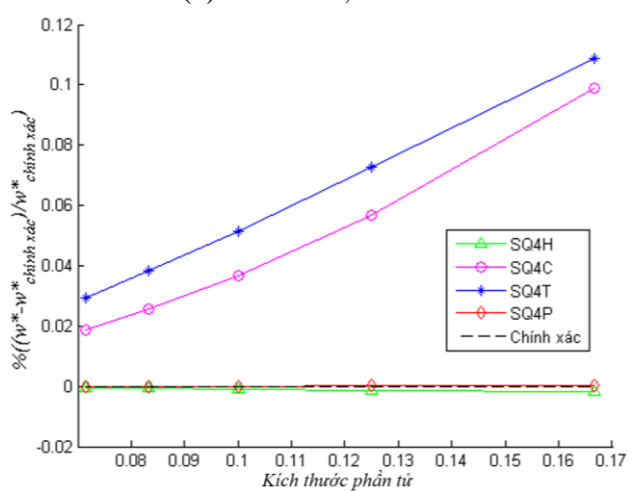
(a)  $a/h = 10$ , CCCC



(b)  $a/h = 10$ , CCCC



(c)  $a/h = 10000$ , CCCC



(d)  $a/h = 10000$ , CCCC

**Hình 7.3:** So sánh sai số độ võng của tấm vuông liên kết ngàm với  $a/h = 10$  và  $10000$

Bảng 7.1 trình bày giá trị độ võng thu được khi dùng bốn phần tử của luận án. Có thể thấy kết quả độ võng chính giữa tấm đạt được bởi phần tử SQ4P tốt nhất, tiếp đến là phần tử SQ4H và sau đó là hai phần tử còn lại SQ4C và SQ4T.

**Bảng 7.1:** So sánh độ võng chính giữa tấm vuông liên kết tựa đơn (SSSS)

Lưới chia	$w^*$ (SSSS)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.428705	0.428053	0.427756	0.427607	0.427517
SQ4T	0.416173	0.422814	0.425944	0.427656	0.428687
SQ4C	0.439931	0.434335	0.431777	0.430397	0.429568
SQ4P	0.427287	0.427285	0.427284	0.427284	0.427284
$a/h = 100$					
SQ4H	0.406833	0.406661	0.406582	0.40654	0.406515
SQ4T	0.392431	0.398544	0.401415	0.402984	0.403928
SQ4C	0.418631	0.413238	0.410774	0.409444	0.408646
SQ4P	0.406494	0.406459	0.406451	0.406448	0.406447
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.406614	0.406447	0.40637	0.406329	0.406305
SQ4T	0.392193	0.398301	0.40117	0.402737	0.403680
SQ4C	0.418418	0.413027	0.410564	0.409235	0.408436
SQ4P	0.406293	0.406254	0.406244	0.406241	0.406239
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.406612	0.406445	0.406368	0.406327	0.406303
SQ4T	0.392191	0.398299	0.401167	0.402735	0.403678
SQ4C	0.418416	0.413025	0.410561	0.409233	0.408434
SQ4P	0.406291	0.406253	0.406242	0.406239	0.406237

Tương tự, trường hợp tấm liên kết ngàm (CCCC), Bảng 7.2 trình bày giá trị độ võng thu được khi dùng bốn phần tử của luận án đồng thời các Hình 7.3a-d tiếp tục thể hiện đồ thị đánh giá sai số chung giữa bốn phần tử SQ4H, SQ4C, SQ4T và SQ4P. Phần tử SQ4P vẫn cho kết quả khả quan nhất, tiếp đến là phần tử SQ4H và sau cùng là hai phần tử còn lại SQ4C, SQ4T. Đặc biệt trong một số trường hợp thể hiện sự không ổn định trong kết quả thu được bởi phần tử SQ4T như ở Hình 7.2a và Hình 7.3a liên quan đến việc tính toán thông qua miền ảnh hưởng lân cận phần tử đang xét. Đánh giá kỹ hơn về vấn đề này có thể được xem như một định hướng phát triển tương lai của luận án.

**Bảng 7.2:** So sánh độ võng chính giữa tấm vuông liên kết ngàm (CCCC)

Phần tử	$w^*$ (CCCC)				
	6 x 6	8 x 8	10 x 10	12 x 12	14 x 14
$a/h = 10$					
SQ4H	0.149973	0.150578	0.150268	0.150302	0.150256
SQ4T	0.158590	0.154636	0.152279	0.150808	0.149836



SQ4C	0.161212	0.156231	0.153900	0.152630	0.151863
SQ4P	0.150448	0.150458	0.150461	0.150462	0.150462
$a/h = 100$					
SQ4H	0.126546	0.126640	0.126684	0.126716	0.126731
SQ4T	0.140491	0.135932	0.133233	0.131559	0.130452
SQ4C	0.139258	0.133919	0.131395	0.130004	0.129159
SQ4P	0.126763	0.126776	0.126781	0.126783	0.126784
$a/h = 1000$					
SQ4H	0.126300	0.126382	0.126433	0.126461	0.126479
SQ4T	0.140306	0.135739	0.133036	0.131359	0.130251
SQ4C	0.139034	0.133691	0.131163	0.129770	0.128923
SQ4P	0.126510	0.126524	0.126530	0.126532	0.126533
$a/h = 10000$					
SQ4H	0.126297	0.126379	0.126430	0.126459	0.126477
SQ4T	0.140304	0.135737	0.133034	0.131357	0.130249
SQ4C	0.139032	0.133688	0.131160	0.129768	0.128921
SQ4P	0.126508	0.126522	0.126527	0.126529	0.126531

**Bảng 7.3:** So sánh thời gian tính toán theo giây (s)

SSSS, $a/h = 10$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs) 0.47674 s	SQ4T (1125 dofs) 11.2697 s	SQ4C (1125 dofs) 2.2078 s	SQ4P (9245 dofs) 81.9208 s	SQ4P (1805 dofs) 2.8599 s
SSSS, $a/h = 10000$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs) 0.47621 s	SQ4T (1125 dofs) 11.6926 s	SQ4C (1125 dofs) 2.7641 s	SQ4P (9245 dofs) 83.1269 s	SQ4P (1805 dofs) 2.9227 s
CCCC, $a/h = 10$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs) 0.7518 s	SQ4T (1125 dofs) 11.0411 s	SQ4C (1125 dofs) 2.4872 s	SQ4P (9245 dofs) 83.3733 s	SQ4P (1805 dofs) 2.9587 s
CCCC, $a/h = 10000$				
14 x 14			6 x 6	
SQ4H (1575 dofs) 0.7202 s	SQ4T (1125 dofs) 11.3438 s	SQ4C (1125 dofs) 2.9373 s	SQ4P (9245 dofs) 83.7899 s	SQ4P (1805 dofs) 2.9251 s

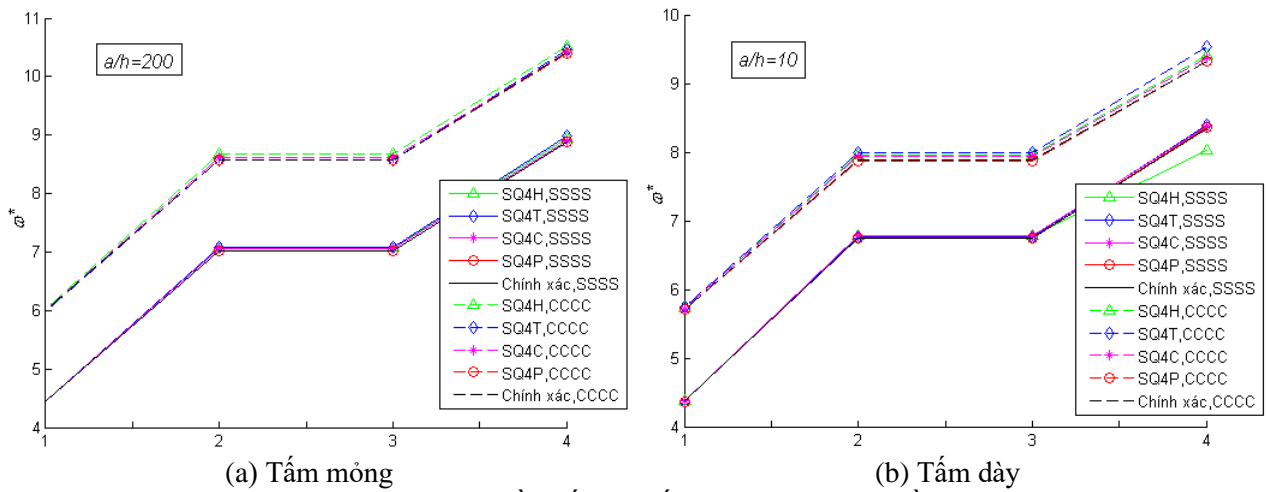
Trên cơ sở máy tính với các thông số **Intel® Core™ i7 @ 2.80 GHz, 8.00GB RAM**, việc so sánh thời gian tính toán giữa các phần tử được trình bày ở Bảng 7.3. Nếu dựa vào số lượng phần tử tương đương nhau, có thể thấy thời gian tính toán theo giây (s) của phần tử SQ4P là lớn nhất. Tuy nhiên việc sử dụng bậc  $p_1=p_2=3$  cho phần tử SQ4P khiến tổng số bậc tự do (dofs) của phần tử này lớn hơn nhiều so với các phần tử còn lại. Việc so sánh thời gian dựa trên tổng số bậc tự do xấp xỉ nhau cho thấy thời gian tính toán của phần tử SQ4T là lớn nhất. Điều này cũng được trình bày trên Bảng 7.3.

### 7.3 Tấm đẳng hướng dao động tự do

Ở mục này, luận án đề cập đến phân tích dao động tự do của tấm vuông mỏng ( $a/h = 200$ ) và dày ( $a/h = 10$ ) với hai điều kiện biên là tựa đơn (SSSS) và ngàm (CCCC). Đặc trưng vật liệu  $E = 200$  GPa, hệ số Poisson  $\mu = 0.3$  và mật độ khối lượng  $\rho = 8000$  kg/m<sup>3</sup>.

**Bảng 7.4:** So sánh giá trị bốn tần số dao động đầu tiên của tấm vuông đẳng hướng

Dạng dao động	$a/h = 10, (SSSS)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	4.373	4.368	4.369	4.366	4.37
2	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
3	6.787	6.757	6.772	6.744	6.74
4	8.028	8.391	8.379	8.354	8.35
Dạng dao động	$a/h = 10, (CCCC)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	5.726	5.738	5.715	5.703	5.71
2	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
3	7.960	7.991	7.932	7.876	7.88
4	9.414	9.533	9.378	9.325	9.33
Dạng dao động	$a/h = 200, (SSSS)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	4.450	4.455	4.445	4.443	4.443
2	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
3	7.074	7.074	7.055	7.025	7.025
4	8.948	8.987	8.909	8.885	8.886
Dạng dao động	$a/h = 200, (CCCC)$				
	SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P	Chính xác
1	6.024	5.986	6.000	5.998	5.999
2	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568
3	8.671	8.576	8.610	8.567	8.568
4	10.522	10.451	10.419	10.403	10.407



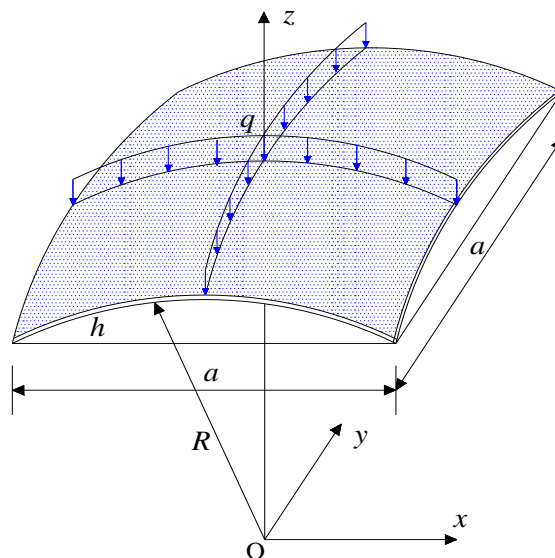
Bốn giá trị tần số dao động đầu tiên chuẩn hóa  $\omega^* = \left[ 12\omega_{vib}\rho a^4 (1-\mu^2)/(Eh^2) \right]^{1/4}$  dựa vào bốn phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P ứng với lưới chia 8 x 8 được trình bày ở Bảng 7.4 và Hình 7.4. Các kết quả này được đem so sánh với kết quả chính xác trích xuất từ tài liệu của tác giả Abbassian và cộng sự ở [143]. Bên cạnh đó, thời gian tính toán cũng được ghi nhận lại giữa các phần tử với tổng số bậc tự do xấp xỉ 1600 dofs trên toàn miền rời rạc. Bảng 7.5 cho thấy thời gian tính toán của phần tử SQ4T vẫn lớn nhất.

**Bảng 7.5:** So sánh thời gian tính toán theo giây (s)

SSSS, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
19.4063 s	30.2069 s	17.1924 s	10.6400 s
CCCC, $a/h = 10, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
13.3436 s	27.0411 s	13.9900 s	10.3403 s
SSSS, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
18.2277 s	30.4165 s	16.7336 s	10.3201 s
CCCC, $a/h = 200, \cong 1600$ dofs			
SQ4H	SQ4T	SQ4C	SQ4P
12.3259 s	26.2291 s	13.6833 s	10.1188 s

#### 7.4 Vỏ cầu đẳng hướng chịu tải phân bố đều

Một vỏ cầu tựa đơn trên bốn cạnh biên và chịu tải phân bố đều  $q$  như Hình 7.5 tiếp tục được phân tích và so sánh kết quả độ võng ngay điểm chính giữa vỏ.



**Hình 7.5:** Vỏ cầu đẳng hướng tựa đơn chịu tải phân bố đều

**Bảng 7.6:** So sánh giá trị độ võng ngay chính giữa vỏ cầu tựa đơn

So sánh	Lưới chia	$w$
SQ4H	8 x 8	0.3299
	12 x 12	0.3269
	16 x 16	0.3236
SQ4T	8 x 8	0.2699
	12 x 12	0.2744
	16 x 16	0.2824
SQ4C	8 x 8	0.3108
	12 x 12	0.3124
	16 x 16	0.3129
SQ4P	8 x 8	0.3129
	12 x 12	0.3131
	16 x 16	0.3132
HBQ8 [6]		0.3104
KUMBA [144]		0.3304
Giải tích (Reddy) [119]		0.3138

Kết cấu này có các đặc trưng  $a = 32$ ,  $R = 96$ ,  $h = 0.32$ ,  $E = 10^7$ ,  $\mu = 0.3$  và  $q = 100$ . Mô hình  $\frac{1}{4}$  vỏ với lưới chia 8 x 8, 12 x 12 và 16 x 16 được sử dụng để tính toán kết quả độ võng dựa trên các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P. Bảng 7.6 thể hiện kết quả thu được ứng với 4 phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P đồng thời thể hiện kết quả tham khảo từ tài liệu [6] của tác giả Darilmaz và cộng sự với 12 x 12 phần tử vỏ 8 nút HBQ8, tài liệu [144] của tác giả Kumbasar và cộng sự với 16 x 16 phần tử vỏ cong KUMBA và tài liệu [119] của tác giả Reddy với nghiệm giải tích. Theo Bảng 7.6, khi so sánh với nghiệm giải tích cho bởi tác giả Reddy, kết quả thu được bởi 3 phần tử SQ4T, SQ4C và SQ4P theo xu hướng cận dưới trong đó kết quả tốt nhất là của phần tử SQ4P tiếp theo là của phần tử SQ4C. Với phần tử SQ4T, kết quả sai số nhiều liên quan đến quá trình xác định miền ảnh hưởng bao quanh phần tử đang xét, nhất là đối với kết cấu vỏ cong hai phương, dẫn đến phức tạp trong quá trình tính toán ma trận độ cứng tổng thể cũng như cứng hóa kết cấu kéo theo sai số lớn. Ngoài ra, kết quả thu được bởi phần tử SQ4H theo xu hướng cận trên như thể hiện ở Bảng 7.6.

## 7.5 Kết luận

Các phần tử SQ4H, SQ4C, SQ4P đã thể hiện khả năng ứng dụng tốt trong phân tích kết cấu tấm/vỏ, riêng phần tử SQ4T còn khó khăn khi phát triển phân tích kết cấu vỏ có độ cong lớn hay vỏ cong hai phương. Nguyên nhân này có thể xuất phát từ cách thiết lập

---

phần tử SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép mà ở đó có kể đến ảnh hưởng của các nút lân cận lên phần tử vỏ đang xét. Đối với kết cấu tấm, trong một số trường hợp phân tích, phần tử SQ4T cũng cho kết quả không được ổn định so với các phần tử khác đã phát triển.

Nhìn chung, dựa vào những kết quả số đã đạt được như đã trình bày ở các mục của chương này cũng như các chương trước, các phần tử được xây dựng và phát triển trong luận án là các phần tử tứ giác đơn giản và hiệu quả trong phân tích kết cấu dạng tấm/vỏ so với các loại phần tử khác đang hiện hành.

---

## Chương 8

# KẾT LUẬN VÀ HƯỚNG PHÁT TRIỂN

### 8.1 Kết luận

Trong luận án này, nhóm phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P lần đầu tiên được thiết lập để phân tích kết cấu dạng tấm/vỏ. Cụ thể, phần tử SQ4H được hình thành dựa vào kỹ thuật tron biến dạng trên miền con kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc ba dạng  $C^0$ , phần tử SQ4T dựa vào kỹ thuật nội suy kép, phần tử SQ4C dựa vào kỹ thuật tổ hợp biến dạng và phần tử SQ4P được xây dựng dựa trên đa thức Chebyshev. Kết quả của nghiên cứu hiện tại bao gồm:

- Phần tử phẳng tứ giác (SQ4H) dùng để mô phỏng kết cấu tấm phẳng và tấm gấp nhiều lớp, phần tử này cải thiện độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về số đối với phân tích hình học phi tuyến tính.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa trên kỹ thuật nội suy kép (SQ4T) để mô phỏng kết cấu tấm/vỏ nhiều lớp hay tấm phân cấp chức năng. Với việc xây dựng hàm nội suy bậc cao dựa vào giá trị nút lẩn gradient trung bình nút trong phạm vi miền ảnh hưởng, phần tử này cải thiện được yếu tố bất liên tục của biến dạng và ứng suất qua biên của nó.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa vào kỹ thuật tổ hợp biến dạng (SQ4C) dùng để tính toán kết cấu tấm/vỏ nhiều lớp có hoặc không có sườn gia cường. Phần tử này cải thiện được độ chính xác của mô hình và giảm bớt sự bất ổn về kết quả số liên quan đến hiện tượng khóa màng khi phân tích kết cấu vỏ.
- Phần tử phẳng tứ giác dựa vào đa thức Chebyshev (SQ4P) dùng để phân tích kết cấu tấm/vỏ làm bằng vật liệu xếp phân cấp chức năng có gia cường tiêu cầu graphene. Kết quả phân tích không chỉ phụ thuộc vào lưới chia mà còn phụ thuộc vào bậc của đa thức Chebyshev.
- Các phần tử đều được thiết lập từ lý thuyết đơn lớp tương đương ESL (*equivalent single layer*) nên dễ dàng điều chỉnh đặc trưng vật liệu từ vật liệu đẳng hướng đến vật liệu composite nhiều lớp, vật liệu phân cấp chức năng, vật liệu xếp có gia cường...

- Các ma trận độ cứng màng, uốn, cắt và hình học đều được thiết lập để từ đó xác định ma trận độ cứng tổng của phần tử. Đặc biệt với các phần tử SQ4H và SQ4C, việc tính toán ma trận độ cứng màng, uốn và hình học được thực hiện bởi tích phân dọc biên miền con của phần tử thay vì tích phân trực tiếp trên miền con như kỹ thuật truyền thống.
- Các phần tử đều khắc phục được hiện tượng khóa cắt (*shear locking*), khóa màng (*membrane locking*), đặc biệt khắc phục hiện tượng đồng hồ cát (*hourglass phenomena* hay còn gọi là *spurious zero energy modes*) khi phân tích dao động tự do.
- Các phần tử đều có ưu và nhược điểm liên quan đến cách thức thiết lập tùy nhiên theo ý kiến chủ quan chúng có thể được xem xét như là các phần tử tứ giác đơn giản trong áp dụng.
- Căn cứ việc so sánh kết quả phân tích dựa trên 4 phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P với các kết quả được trích xuất từ các tài liệu uy tín và đáng tin cậy, chúng nên được mở rộng sang các hướng phân tích khác trong tương lai.

## 8.2 Hướng phát triển

Trên nền tảng đã được thiết lập và xác minh, các phần tử SQ4H, SQ4T, SQ4C và SQ4P có thể được sử dụng để tiếp tục phát triển theo các định hướng sau:

- Cải tiến kỹ thuật sâu hơn, áp dụng các công cụ tính toán hiện đại hơn, chuyển đổi lý thuyết tính toán hợp lý hơn.
- Đánh giá kỹ hơn các đặc tính về phương pháp tính của các phần tử đề xuất như: tốc độ hội tụ, sự đơn giản trong chia lưới, sự tương thích và ổn định của kết quả số cũng như chi phí tính toán.

Ngoài ra, các phần tử đề xuất có thể tiếp tục được mở rộng phạm vi phân tích số cho các bài toán cơ học khác như:

- Phân tích tuyến tính và phi tuyến hình học cho kết cấu tấm/vỏ có tích hợp lớp áp điện.
- Phân tích tuyến tính và phi tuyến hình học cho kết cấu tấm/vỏ làm bằng vật liệu xốp.
- Phân tích tương tác rắn-lỏng, ...

- 
- Nghiên cứu ứng xử của kết cấu tấm/vỏ dưới tác dụng tổng hợp cơ-thủy-nhiệt.
  - Phân tích cấu trúc vi mô trên cơ sở kết hợp với lý thuyết đàn hồi phi cục bộ.
  - Phân tích ứng xử đàn dẻo của kết cấu composite.
  - Nghiên cứu phi tuyến vật liệu.



---

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. P. Timoshenko, *Theory Of Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1987.
- [2] J. N. Reddy, *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*. CRC Press, 2006.
- [3] E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. CRC Press, 2001.
- [4] H. N. Xuan, "A strain smoothing method in finite elements for structural analysis," PhD, University of Liege, Belgium, 2008.
- [5] H. Nguyen-Van, "Development and application of assumed strain smoothing finite element technique for composite plate/shell structures," PhD thesis, 2009.
- [6] K. Darılmaz and N. Kumbasar, "An 8-node assumed stress hybrid element for analysis of shells," *Computers & Structures*, vol. 84, no. 29, pp. 1990-2000, 2006.
- [7] P.-S. Lee and K.-J. Bathe, "Development of MITC isotropic triangular shell finite elements," *Computers & Structures*, vol. 82, no. 11, pp. 945-962, 2004.
- [8] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *The Finite Element Method*. McGraw-hill, 1977.
- [9] B. Irons and S. Ahmad, *Techniques Of Finite Elements*. John Wiley & Sons, 1980.
- [10] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 2, pp. 367-383, 1985.
- [11] B. Klaus-Jürgen and D. E. N., "A formulation of general shell elements—the use of mixed interpolation of tensorial components," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 3, pp. 697-722, 1986.
- [12] K.-J. Bathe, F. Brezzi, and S. W. Cho, "The MITC7 and MITC9 Plate bending elements," *Computers & Structures*, vol. 32, no. 3, pp. 797-814, 1989/01/01/ 1989.
- [13] B. M. Luiz and B. Klaus-Jüen, "Higher-order MITC general shell elements," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 21, pp. 3729-3754, 1993.
- [14] H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, N. Nguyen-Thanh, T. Nguyen-Thoi, and S. Bordas, "A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap

- 
- technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 46, no. 5, pp. 679-701, 2010.
- [15] H. Nguyen-Xuan, G. R. Liu, C. Thai-Hoang, and T. Nguyen-Thoi, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner–Mindlin plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9, pp. 471-489, 2010.
- [16] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and C. Thai-Hoang, "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [17] G. Yang, D. Hu, X. Han, and G. Ma, "An extended edge-based smoothed discrete shear gap method for free vibration analysis of cracked Reissner–Mindlin plate," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 51, pp. 477-504, 2017.
- [18] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "A three-node mindlin plate element with improved transverse shear," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 50, no. 1, pp. 71-101, 1985.
- [19] A. Tessler and T. J. R. Hughes, "An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 39, no. 3, pp. 311-335, 1983.
- [20] T. Nguyen-Thoi, P. Phung-Van, H. Luong-Van, H. Nguyen-Van, and H. Nguyen-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates," *Computational Mechanics*, journal article vol. 51, no. 1, pp. 65-81, 2013.
- [21] H. Nguyen-Van, N. Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 313, no. 1, pp. 205-223, 2008.
- [22] H. Nguyen-Van, H. L. Ton-That, T. Chau-Dinh, and N. D. Dao, "Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations," Singapore, 2018, pp. 461-475: Springer Singapore.
-

- 
- [23] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "The MITC4+ shell element and its performance," *Computers & Structures*, vol. 169, pp. 57-68, 2016.
- [24] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new MITC4+ shell element," *Computers & Structures*, vol. 182, pp. 404-418, 2017.
- [25] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe, "A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element," *Computers & Structures*, vol. 192, pp. 34-49, 2017.
- [26] U. Zrahia and P. Bar-Yoseph, "Plate spectral elements based upon Reissner–Mindlin theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, no. 8, pp. 1341-1360, 1995.
- [27] M. A. Sprague and A. Purkayastha, "Legendre spectral finite elements for Reissner–Mindlin composite plates," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 105, pp. 33-43, 2015.
- [28] K. D. Brito and M. A. Sprague, "Reissner–Mindlin Legendre spectral finite elements with mixed reduced quadrature," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 58, pp. 74-83, 2012.
- [29] T. Liu, Q. Wang, B. Qin, and A. Wang, "Free in-plane vibration of plates with arbitrary curvilinear geometry: Spectral-Chebyshev model and experimental study," *Thin-Walled Structures*, vol. 170, p. 108628, 2022.
- [30] D. He, T. Liu, B. Qin, Q. Wang, Z. Zhai, and D. Shi, "In-plane modal studies of arbitrary laminated triangular plates with elastic boundary constraints by the Chebyshev-Ritz approach," *Composite Structures*, vol. 271, p. 114138, 2021.
- [31] H. Dang-Trung, D.-J. Yang, and Y. C. Liu, "Improvements in Shear Locking and Spurious Zero Energy Modes Using Chebyshev Finite Element Method," *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 19, no. 1, 2018.
- [32] G. R. Liu, K. Y. Dai, and T. T. Nguyen, "A Smoothed Finite Element Method for Mechanics Problems," *Computational Mechanics*, journal article vol. 39, no. 6, pp. 859-877, 2007.
- [33] L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "A theoretical study on the smoothed FEM (S-FEM) models: Properties, accuracy and convergence rates," *International*
-

- 
- Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 84, no. 10, pp. 1222-1256, 2010.
- [34] T. T. Nguyen, G. R. Liu, K. Y. Dai, and K. Y. Lam, "Selective Smoothed Finite Element Method," *Tsinghua Science & Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 497-508, 2007.
- [35] T. Nguyen-Thoi, "Development Of Smoothed Finite Element Method (SFEM)," PhD, National University of Singapore, 2009.
- [36] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, H. Nguyen-Xuan, and K. Y. Lam, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems," *Computers & Structures*, vol. 87, no. 1, pp. 14-26, 2009.
- [37] T. Nguyen-Thoi, H. C. Vu-Do, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solution to visco-elastoplastic analyses of solids using triangular and tetrahedral meshes," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 45, pp. 3005-3027, 2010.
- [38] C. H. Thai, L. V. Tran, D. T. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. Nguyen-Xuan, "Analysis of laminated composite plates using higher-order shear deformation plate theory and node-based smoothed discrete shear gap method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 11, pp. 5657-5677, 2012.
- [39] Liu G. R., C. L., N. T. T., Z. K. Y., and Z. G. Y., "A novel singular node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions of fracture problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 11, pp. 1466-1497, 2010.
- [40] G. R. Liu, T. Nguyen-Thoi, and K. Y. Lam, "An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for static, free and forced vibration analyses of solids," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 320, no. 4, pp. 1100-1130, 2009.
- [41] T. T. Ngoc, L. G. R., N. X. H., and N. T. T., "An edge-based smoothed finite element method for primal–dual shakedown analysis of structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 82, no. 7, pp. 917-938, 2010.
-

- 
- [42] H. Nguyen-Xuan, L. V. Tran, T. Nguyen-Thoi, and H. C. Vu-Do, "Analysis of functionally graded plates using an edge-based smoothed finite element method," *Composite Structures*, vol. 93, no. 11, pp. 3019-3039, 2011.
- [43] T.-K. Nguyen, V.-H. Nguyen, T. Chau-Dinh, T. P. Vo, and H. Nguyen-Xuan, "Static and vibration analysis of isotropic and functionally graded sandwich plates using an edge-based MITC3 finite elements," *Composites Part B: Engineering*, vol. 107, pp. 162-173, 2016.
- [44] T. Chau-Dinh, Q. Nguyen-Duy, and H. Nguyen-Xuan, "Improvement on MITC3 plate finite element using edge-based strain smoothing enhancement for plate analysis," *Acta Mechanica*, journal article vol. 228, no. 6, pp. 2141-2163, 2017.
- [45] Nguyen T. T., Phung V. P., N. X. Hung, and Thai H. C., "A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 91, no. 7, pp. 705-741, 2012.
- [46] Le C. V., N. X. Hung, A. H., B. S. P. A., R. T., and Nguyen V. H., "A cell-based smoothed finite element method for kinematic limit analysis," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 83, no. 12, pp. 1651-1674, 2010.
- [47] C. Thai-Hoang, N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, T. Rabczuk, and S. Bordas, "A cell — based smoothed finite element method for free vibration and buckling analysis of shells," *KSCE Journal of Civil Engineering*, journal article vol. 15, no. 2, pp. 347-361, 2011.
- [48] T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, P. Phung-Van, H. Nguyen-Xuan, and P. Ngo-Thanh, "Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements," *Computers & Structures*, vol. 125, pp. 100-113, 2013.
- [49] J. h. Lim, D. Sohn, and S. Im, *Variable-node element families for mesh connection and adaptive mesh computation*. 2012, pp. 349-370.
- [50] Y. S. Cho, S. Jun, S. Im, and H.-G. Kim, *An improved interface element with variable nodes for non-matching finite element meshes*. 2005, pp. 3022-3046.
-

- 
- [51] T. Q. Bui, D. Q. Vo, C. Zhang, and D. D. Nguyen, "A consecutive-interpolation quadrilateral element (CQ4): Formulation and applications," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 84, pp. 14-31, 2014.
- [52] S. C. Wu, W. H. Zhang, X. Peng, and B. R. Miao, "A Twice-Interpolation finite element method (TFEM) for crack propagation problems," *International Journal of Computational Methods*, vol. 09, no. 04, p. 1250055, 2012.
- [53] C. Zheng, S. C. Wu, X. H. Tang, and J. H. Zhang, "A novel twice-interpolation finite element method for solid mechanics problems," *Acta Mechanica Sinica*, journal article vol. 26, no. 2, pp. 265-278, 2010.
- [54] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4135-4195, 2005.
- [55] N. Nguyen-Thanh, H. Nguyen-Xuan, S. P. A. Bordas, and T. Rabczuk, "Isogeometric analysis using polynomial splines over hierarchical T-meshes for two-dimensional elastic solids," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 21, pp. 1892-1908, 2011.
- [56] N. Nguyen-Thanh *et al.*, "An extended isogeometric thin shell analysis based on Kirchhoff–Love theory," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 284, pp. 265-291, 2015.
- [57] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, S. P. A. Bordas, T. Rabczuk, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a new inverse trigonometric shear deformation theory," *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 43, pp. 89-108, 2014.
- [58] C. H. Thai, A. J. M. Ferreira, E. Carrera, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of laminated composite and sandwich plates using a layerwise deformation theory," *Composite Structures*, vol. 104, pp. 196-214, 2013.
- [59] L. V. Tran, A. J. M. Ferreira, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 51, pp. 368-383, 2013.
-

- 
- [60] P. Phung-Van, M. Abdel-Wahab, K. M. Liew, S. P. A. Bordas, and H. Nguyen-Xuan, "Isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using higher-order shear deformation theory," *Composite Structures*, vol. 123, pp. 137-149, 2015.
- [61] Y. Bazilevs *et al.*, "Isogeometric analysis using T-splines," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 5, pp. 229-263, 2010.
- [62] H. Gómez, V. M. Calo, Y. Bazilevs, and T. J. R. Hughes, "Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase-field model," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, no. 49, pp. 4333-4352, 2008.
- [63] Teodor M. Atanackovic and A. Guran, *Theory of Elasticity for Scientists and Engineers*. Springer Science+Business Media, 2000.
- [64] Timoshenko. SP and G. JM, *Theory of elastic stability*. New York: McGraw-Hill, 1961.
- [65] J. N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells-Theory and analysis*. CRC Press, 2004.
- [66] N. V. Hau, "Nghiên cứu ứng xử tấm composite chức năng (FGM) dưới tác dụng tải trọng cơ nhiệt," PhD, HCMUTE, 2018.
- [67] Tran Ich Thinh and N. N. Khoa, *Phương Pháp Phần Tử Hữu Hạn*. Hà Nội, 2007.
- [68] H.-S. Shen, *Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells*. CRC Press, 2019.
- [69] T. Q. Bui *et al.*, "On the high temperature mechanical behaviors analysis of heated functionally graded plates using FEM and a new third-order shear deformation plate theory," *Composites Part B: Engineering*, vol. 92, pp. 218-241, 2016.
- [70] N. D. Duc, *Nonlinear static and dynamic stability of functionally graded plates and shells*. Vietnam National University, 2014.
- [71] K. A. Khor, Z. L. Dong, and Y. W. Gu, "Plasma sprayed functionally graded thermal barrier coatings," *Materials Letters*, vol. 38, no. 6, pp. 437-444, 1999.
- [72] W.-H. Lee, S.-C. Han, and W.-T. Park, "A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 122, pp. 330-342, 2015.
-

- 
- [73] W.-Y. Jung and S.-C. Han, "Static and eigenvalue problems of Sigmoid Functionally Graded Materials (S-FGM) micro-scale plates using the modified couple stress theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 12, pp. 3506-3524, 2015.
- [74] K. Gao, W. Gao, D. Wu, and C. Song, "Nonlinear dynamic buckling of the imperfect orthotropic E-FGM circular cylindrical shells subjected to the longitudinal constant velocity," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 138-139, pp. 199-209, 2018.
- [75] C. Betts, "Benefits of metal foams and developments in modelling techniques to assess their materials behaviour: a review," *Materials Science and Technology*, vol. 28, no. 2, pp. 129-143, 2012.
- [76] L.-P. Lefebvre, J. Banhart, and D. C. Dunand, "Porous Metals and Metallic Foams: Current Status and Recent Developments," *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, no. 9, pp. 775-787, 2008.
- [77] K. Li *et al.*, "Isogeometric Analysis of functionally graded porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 114-130, 2018.
- [78] S. Sahmani, A. M. Fattahi, and N. A. Ahmed, "Analytical treatment on the nonlocal strain gradient vibrational response of postbuckled functionally graded porous micro-/nanoplates reinforced with GPL," *Engineering with Computers*, vol. 36, no. 4, pp. 1559-1578, 2020.
- [79] N. V. Nguyen, H. Nguyen-Xuan, D. Lee, and J. Lee, "A novel computational approach to functionally graded porous plates with graphene platelets reinforcement," *Thin-Walled Structures*, vol. 150, p. 106684, 2020.
- [80] K. Gao, W. Gao, D. Chen, and J. Yang, "Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation," *Composite Structures*, vol. 204, pp. 831-846, 2018.
- [81] M. A. Rafiee, J. Rafiee, Z. Wang, H. Song, Z.-Z. Yu, and N. Koratkar, "Enhanced Mechanical Properties of Nanocomposites at Low Graphene Content," *ACS Nano*, vol. 3, no. 12, pp. 3884-3890, 2009.
-



- 
- [82] F. Ebrahimi and A. Dabbagh, "Vibration analysis of multi-scale hybrid nanocomposite plates based on a Halpin-Tsai homogenization model," *Composites Part B: Engineering*, vol. 173, p. 106955, 2019.
- [83] Hieu Nguyen-Van, Nam Mai-Duy, and T. Tran-Cong, "A simple and accurate four-node quadrilateral element using stabilized nodal integration for laminated plates," *CMC: Computers, Materials and Continua*, vol. 6, no. 3, pp. 159-176, 2007.
- [84] R. L. Taylor, "Finite element analysis of linear shell problems, in J. Whiteman (ed.)," in *Proceeding of the Mathematics in Finite Element and Applications*, 1987: Academic Press, New York.
- [85] O. C. Zienkiewicz and R. L. Taylor, *The Finite Element Method, Vol. 2: Solid Mechanics*. Butterworth Heinemann-Oxford, 2000.
- [86] S. Mukherjee, Z. Bao, M. Roman, and N. Aubry, "Nonlinear mechanics of MEMS plates with a total Lagrangian approach," *Computers & Structures*, vol. 83, no. 10, pp. 758-768, 2005.
- [87] R. Zinno and E. J. Barbero, "Total Lagrangian formulation for laminated composite plates analysed by three-dimensional finite elements with two-dimensional kinematic constraints," *Computers & Structures*, vol. 57, no. 3, pp. 455-466, 1995.
- [88] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates by two new displacement-based quadrilateral plate elements," *Composite Structures*, vol. 72, no. 3, pp. 301-310, 2006.
- [89] P. Phung-Van, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and Q. Lieu-Xuan, "A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) based on the C0-type higher-order shear deformation for geometrically nonlinear analysis of laminated composite plates," *Computational Materials Science*, vol. 96, pp. 549-558, 2015/01/01/ 2015.
- [90] N. S. Putchu and J. N. Reddy, "A refined mixed shear flexible finite element for the nonlinear analysis of laminated plates," *Computers & Structures*, vol. 22, no. 4, pp. 529-538, 1986.
-

- 
- [91] A. K. Upadhyay and K. K. Shukla, "Large deformation flexural behavior of laminated composite skew plates: An analytical approach," *Composite Structures*, vol. 94, no. 12, pp. 3722-3735, 2012.
- [92] G. Watts, S. Pradyumna, and M. K. Singha, *Nonlinear analysis of quadrilateral composite plates using moving kriging based element free Galerkin method*. 2016.
- [93] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Geometric non-linear analysis of folded plate structures by the spline strip kernel particle method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 71, no. 9, pp. 1102-1133, 2007.
- [94] "Element Reference. Ansys 6.1 Documentation."
- [95] K. M. Liew, L. X. Peng, and S. Kitipornchai, "Analysis of Symmetrically Laminated Folded Plate Structures Using the Meshfree Galerkin Method," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 16, no. 1, pp. 69-81, 2009.
- [96] R. L. Spilker, D. M. Jakobs, and B. E. Engelmann, "Efficient hybrid stress isoparametric elements for moderately thick and thin multiplayer plates," *Hybrid and Mixed Finite Element Method*, vol. 73, pp. 113-122, 1985.
- [97] T. E. Wilt, A. F. Saleeb, and T. Y. Chang, "A mixed element for laminated plates and shells," *Computers & Structures*, vol. 37, no. 4, pp. 597-611, 1990.
- [98] Ge Z. J. and C. W. J., "A refined discrete triangular Mindlin element for laminated composite plates," *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 14, pp. 575-593, 2002.
- [99] Y. X. Zhang and K. S. Kim, "Two simple and efficient displacement-based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 61, no. 11, pp. 1771-1796, 2004.
- [100] J. M. Whitney, "Bending-extensional coupling in laminated plates under transverse load," *Journal of Composite Materials*, vol. 3, pp. 398-411, 1969.
- [101] J. M. Whitney, "The effect of boundary conditions on the response of laminated composites," *Journal of Composite Materials*, vol. 4, pp. 192-203, 1970.
-

- 
- [102] G. Singh, P. Raveendranath, and G. Vekateswara Rao, "An accurate four-node shear flexible composite plate element," vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [103] S. Gajbir, R. P., and V. R. G., "An accurate four-node shear flexible composite plate element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 47, no. 9, pp. 1605-1620, 2000.
- [104] W. Lanhe, L. Hua, and W. Daobin, "Vibration analysis of generally laminated composite plates by the moving least squares differential quadrature method," *Composite Structures*, vol. 68, no. 3, pp. 319-330, 2005.
- [105] A. J. M. Ferreira, C. M. C. Roque, and R. M. N. Jorge, "Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by FSDT and radial basis functions," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 194, no. 39, pp. 4265-4278, 2005.
- [106] K. M. Liew, Y. Q. Huang, and J. N. Reddy, "Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 19, pp. 2203-2222, 2003.
- [107] A. A. Khdeir and L. Librescu, "Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II—Buckling and free vibration," *Composite Structures*, vol. 9, no. 4, pp. 259-277, 1988.
- [108] J. N. Reddy and N. D. Phan, "Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 98, no. 2, pp. 157-170, 1985.
- [109] K. M. Liew, "Solving The Vibration Of Thick Symmetric Laminates By Reissner/Mindlin Plate Theory And The p-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, no. 3, pp. 343-360, 1996.
- [110] A. J. M. Ferreira and G. E. Fasshauer, "Analysis of natural frequencies of composite plates by an RBF-pseudospectral method," *Composite Structures*, vol. 79, no. 2, pp. 202-210, 2007.
-

- 
- [111] C. P. Wu and W. Y. Chen, "Vibration And Stability Of Laminated Plates Based On A Local High Order Plate Theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 177, no. 4, pp. 503-520, 1994.
- [112] H. Matsunaga, "Vibration and stability of cross-ply laminated composite plates according to a global higher-order plate theory," *Composite Structures*, vol. 48, no. 4, pp. 231-244, 2000.
- [113] K. N. Cho, C. W. Bert, and A. G. Striz, "Free vibrations of laminated rectangular plates analyzed by higher order individual-layer theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 145, no. 3, pp. 429-442, 1991.
- [114] W. Zhen and C. Wanji, "Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global–local higher-order theory," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 298, no. 1, pp. 333-349, 2006.
- [115] K. M. Liew, "Solving the vibration of thick symmetric laminates by REISSNER/MINDLIN plate theory and the p-RITZ method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, pp. 343-360, 1996.
- [116] N. D. Phan and J. N. Reddy, "Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, no. 12, pp. 2201-2219, 1985.
- [117] M. L. Liu and C. W. S. To, "Free vibration analysis of laminated composite shell structures using hybrid strain based layerwise finite elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 40, no. 1, pp. 83-120, 2003.
- [118] S. Jayasankar, S. Mahesh, S. Narayanan, and C. Padmanabhan, "Dynamic analysis of layered composite shells using nine node degenerate shell elements," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 299, no. 1, pp. 1-11, 2007.
- [119] J. N. Reddy, "Exact solutions of moderately thick laminated shells," *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, vol. 110, pp. 794-809, 1984.
- [120] L. Liu, L. P. Chua, and D. N. Ghista, "Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates," *Composite Structures*, vol. 78, no. 1, pp. 58-69, 2007.
-

- 
- [121] A. K. Noor, "Stability of multilayered composite plates," *Fibre Science and Technology*, vol. 8, no. 2, pp. 81-89, 1975.
- [122] A. Chakrabarti and A. H. Sheikh, "Buckling of Laminated Composite Plates by a New Element Based on Higher Order Shear Deformation Theory," *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, vol. 10, no. 4, pp. 303-317, 2003.
- [123] J. N. Reddy and A. A. Khdeir, "Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories," *AIAA Journal*, vol. 27, no. 12, pp. 1808-1817, 1989.
- [124] L. R. Kumar, P. K. Datta, and D. L. Prabhakara, "Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading," *Composite Structures*, vol. 60, no. 2, pp. 171-181, 2003.
- [125] B. G. Prusty and S. K. Satsangi, "Finite element buckling analysis of laminated composite stiffened shells," *International Journal of Crashworthiness*, vol. 6, no. 4, pp. 471-484, 2001.
- [126] M. Di Sciuva and E. Carrera, "Static buckling of moderately thick, anisotropic, laminated and sandwich cylindrical shell panels," *AIAA Journal*, vol. 28, no. 10, pp. 1782-1793, 1990.
- [127] V. N. Van Do and C.-H. Lee, "Nonlinear analyses of FGM plates in bending by using a modified radial point interpolation mesh-free method," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 57, pp. 1-20, 2018.
- [128] H. Luong-Van, T. Nguyen-Thoi, G. R. Liu, and P. Phung-Van, "A cell-based smoothed finite element method using three-node shear-locking free Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) for dynamic response of laminated composite plates on viscoelastic foundation," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 42, pp. 8-19, 2014.
- [129] X. Cui, G.-R. Liu, G.-y. Li, G. Zhang, and G. Zheng, "Analysis of plates and shells using an edge-based smoothed finite element method," *Computational Mechanics*, vol. 45, no. 2, p. 141, 2009.
- [130] D. J. Allman, "A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis," *Computers & Structures*, vol. 19, no. 1, pp. 1-8, 1984.
-

- 
- [131] N. Nguyen-Minh, T. Nguyen-Thoi, T. Bui-Xuan, and T. Vo-Duy, "Static and free vibration analyses of stiffened folded plates using a cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3)," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 266, pp. 212-234, 2015.
- [132] A. Ibrahimbegovic, R. L. Taylor, and E. L. Wilson, "A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 30, no. 3, pp. 445-457, 1990.
- [133] C. W. S. To and B. Wang, "Hybrid strain-based three-node flat triangular laminated composite shell elements," *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 28, no. 3, pp. 177-207, 1998.
- [134] T. Park, K. Kim, and S. Han, "Linear static and dynamic analysis of laminated composite plates and shells using a 4-node quasi-conforming shell element," *Composites Part B: Engineering*, vol. 37, no. 2, pp. 237-248, 2005.
- [135] B. R. Somashekar, G. Prathap, and C. R. Babu, "A field-consistent, four-noded, laminated, anisotropic plate/shell element," *Computers & Structures*, vol. 25, no. 3, pp. 345-353, 1987.
- [136] M. P. Rossow and A. K. Ibrahimkhail, "Constraint method analysis of stiffened plates," *Computers & Structures*, vol. 8, no. 1, pp. 51-60, 1978.
- [137] W. Zhao, "Buckling analysis of stiffened plates with straight and curvilinear stiffener(s).", Virginia Tech2013.
- [138] M. Feiz and A. F. Rohach, "Development of a type I Chebyshev polynomial nodal model for the multigroup diffusion equation in 1-D," *Annals of Nuclear Energy*, vol. 16, no. 2, pp. 63-72, 1989.
- [139] X. Xu and C.-S. Zhang, "A new estimate for a quantity involving the Chebyshev polynomials of the first kind," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 476, no. 2, pp. 302-308, 2019.
- [140] R. L. Taylor and F. Auricchio, "Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II—A simple triangle," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 18, pp. 3057-3066, 1993.
-

- 
- [141] Q. H. Nguyen, L. B. Nguyen, H. B. Nguyen, and H. Nguyen-Xuan, "A three-variable high order shear deformation theory for isogeometric free vibration, buckling and instability analysis of FG porous plates reinforced by graphene platelets," *Composite Structures*, vol. 245, p. 112321, 2020.
- [142] J. Yang, D. Chen, and S. Kitipornchai, "Buckling and free vibration analyses of functionally graded graphene reinforced porous nanocomposite plates based on Chebyshev-Ritz method," *Composite Structures*, vol. 193, pp. 281-294, 2018.
- [143] F. Abbassian, D. J. Dawswell, and N. C. Knowles, "Free vibration benchmarks Softback," Atkins Engineering Sciences, Glasgow1987.
- [144] N. Kumbasar and T. Aksu, "A finite element formulation for moderately thick shells of general shape," *Computers & Structures*, vol. 54, no. 1, pp. 49-57, 1995.

---

## DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ

### • TẠP CHÍ ISI

1. Enhancement to four-node quadrilateral plate elements by using cell-based smoothed strains and higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of composite structures. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, Vol. 22(7), pp. 2302-2329, 2020.

2. An Improved Four-Node Element for Analysis of Composite Plate/Shell Structures Based on Twice Interpolation Strategy. *International Journal of Computational Methods*, Vol. 17(6), p. 1950020, 2020.

3. Static and buckling analyses of stiffened plate/shell structures using the quadrilateral element SQ4C. *Comptes Rendus. Mécanique*, Vol. 348(4), pp. 285-305, 2020

4. A Combined Strain Element in Static, Frequency and Buckling Analyses of Laminated Composite Plates and Shells. *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, Vol. 65(1), pp. 56-71, 2021

5. A novel quadrilateral element for analysis of functionally graded porous plates/shells reinforced by graphene platelets. *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 91(6), pp. 2435-2466, 2021.

### • TẠP CHÍ KHÁC

1. Nonlinear Static Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using MISQ24 Elements with Drilling Rotations. *Proceedings of the International Conference on Advances in Computational Mechanics*, Springer, Singapore, pp. 461-475, 2017.

2. Phân tích ứng xử tĩnh tấm composite đa lớp dựa trên một lý thuyết tấm biến dạng cắt bậc cao. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.

3. Phân tích dao động tự do của vỏ có sườn gia cường bằng phân tử tứ giác MISQ24. *Hội nghị cơ học Việt Nam*, 2017.



---

4. Nonlinear Bending Analysis of Functionally Graded Plates Using SQ4T Elements based on Twice Interpolation Strategy. *Journal of Applied and Computational Mechanics*, Vol. 6(1), pp. 125-136, 2020.